MIGUEL KATZ

DUHEM Y EL ELECTROMAGNETISMO DE MAXWELL

ASOCIACIÓN QUÍMICA ARGENTINA

DUHEM Y EL ELECTROMAGNETISMO DE MAXWELL

MIGUEL KATZ

DUHEM Y EL ELECTROMAGNETISMO DE MAXWELL

ASOCIACIÓN QUÍMICA ARGENTINA
BUENOS AIRES
2018

Katz, Miguel
Duhem y el electromagnetismo de Maxwell
1a ed. - Buenos Aires: Asociación Química Argentina, 2018.
Avda. Santa Fe 1145 C1059ABR
Ciudad Autónoma de Buenos Aires. República Argentina.
Tel-Fax (14 11) 4814 5942
Libro digital, PDF/A
Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-46579-7-8
CDD 530
1. Física Matemática, 2. Electromagnetismo I. Título.
Libro de edición electrónica
Hecho en la República Argentina
Hecho el depósito de la Ley 11.723

A la Dra. Lydia Galagovsky, con el afecto de siempre.

Agradecimientos
A la Asociación Química Argentina en las personas de
su Presidente, Dr. Eduardo Castro,
su Vicepresidente Dr. Carlos Cañellas

PREFACIO

James Clerk Maxwell (1831 – 1879) fue uno de los científicos más brillantes, y prolíficos, que dio Gran Bretaña, sólo comparable con Isaac Newton, aunque los aspectos de la Ciencia que estudió fueron mucho más variados que los investigados por el inglés. Maxwell comenzó a publicar trabajos científicos siendo estudiante, a los 15 años presentó un trabajo ante la Royal Society of Edinburgh sobre cuerpos elásticos. Publicó trabajos sobre Óptica, Acústica, Matemáticas, Hidrodinámica, Estadística, Astronomía, Calor y Termodinámica, Geometría, etc. Su frondosa imaginación unida a su habilidad manual y capacidad intelectual, lo llevaron, muchas veces, a emplear los conocimientos de una disciplina para darle forma matemática a las resultados de otra. Así como, en 1827, para exponer su ecuación sobre el flujo de corriente eléctrica en régimen estacionario, Ohm usó los razonamientos de Fourier sobre el flujo estacionario de calor, publicado en 1822 en la *Théorie analytique de la chaleur* o, en 1855, Fick empleó la ley de Fourier para encontrar el flujo de concentración en régimen estacionario, Maxwell aplicó esa transferencia de modelo para explicar los resultados experimentales que obtuvo Faraday al someter limaduras de hierro a la acción de un imán. Para ello consideró que las líneas que forman las limaduras entre los polos del imán, podían considerarse como tubos de diámetro infinitesimal por los que circulaba un fluido incompresible. De esta manera pudo encontrar la expresión matemática para las "líneas de fuerza" de Faraday. A lo largo de la obra de Maxwell se encuentran varios casos de este tipo de "transferencia de comportamiento"

Pierre Duhem (1861 - 1916) fue un científico francés, clerical, monárquico, nacionalista, que hizo grandes contribuciones a la Termodinámica, pero que también incursionó en otros campos de la Ciencia, como el electromagnetismo, y en la Epistemología y la Historia de la Ciencia. Su obra fue muy amplia, en vida publicó unos cuatrocientos trabajos y treinta y dos libros en 45 volúmenes. A su muerte dejó varios trabajos listos para la imprenta y otros trabajos que se fueron completando y publicando hasta la década de 1980. Su espíritu crítico y detallista lo llevó a analizar los trabajos sobre Electricidad y Magnetismo de James Clerk Maxwell.

Maxwell, publicó tres trabajos y dos libros sobre electromagnetismo, a lo largo de los cuales Duhem observó que el autor cambiaba de criterios respecto a las opiniones de Coulomb y Poisson sobre la magnetización por influencia y sus resultados y, además, que había errores sustanciales en algunas fórmulas empleadas. Por eso, entre 1900 y 1901, redactó el trabajo " Les théories électriques de J. Clerk Maxwell" que aquí hemos traducido al castellano. Al traducir, hemos hecho una única corrección. Para nombrar a la propagación de la electricidad a través de un medio, Duhem usa el término *flux* (flujo). Pero, actualmente, en Física se emplea el término flujo, de una magnitud a través de una superficie, para representar qué cantidad de esa magnitud atraviesa *normalmente* a la unidad de superficie en la unidad de tiempo. Dado que la propagación de la electricidad no siempre se propaga en forma perpendicular a la superficie, hemos preferido reemplazar "flujo" por "corriente".

Hemos traducido el texto de Duhem y, para facilitar al lector la comparación entre el análisis de Duhem y los escritos de Maxwell, hemos incorporado tres publicaciones de Maxwell: "On Faraday's lines of Force", "A dynamical theory of the Electromagnetic Field" y "On Physical Lines of Force" . Los dos primeros artículos los hemos traducido al castellano. El tercero, sólo lo hemos copiado, para evitar que los lectores le achaquen a la traducción, los errores gramaticales y el empleo que hizo Maxwell de nombres distintos para una misma magnitud — por ejemplo, el *estado electrotónico* o el *momento electromagnético,* que en otras partes llama *impulso electrocinético* — o, un mismo nombre para magnitudes diferentes, — por ejemplo, identificando *inducción magnética* con *intensidad de magnetización*.

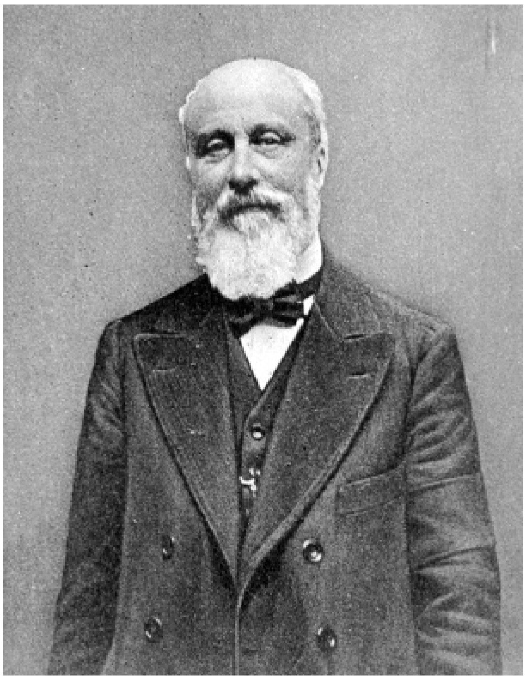
Confiamos en que la crítica constructiva que hizo Duhem sobre el electromagnetismo de Maxwell, sea instructiva para los lectores.

Miguel Katz
Agosto de 2018.

CONTENIDOS

I	*Una breve reseña biográfica sobre Pierre Duhem*	1
II	*Les théories électriques de J. Clerk Maxwell*	49
III	*Sobre las líneas de fuerza de Faraday*	215
IV	*Una teoría dinámica del campo electromagnético*	284
IV	*On physical lines of force*	356

I. UNA BREVE RESEÑA BIOGRÁFICA SOBRE PIERRE DUHEM



Pierre-Maurice-Marie Duhem, nació en París el 9 de junio de 1861.[1] Fue el hijo mayor de Joseph-Pierre Duhem, un comerciante parisino originario de Roubaix, cuyos ancestros provenían de Flandes, una de las tres provincias del Reino de Bélgica. El apellido original era du Hem, o du Hameau, pero al cabo de un par de siglos de vivir en Francia se transformó en Duhem.

La madre de Pierre Duhem, Marie Fabre, era también parisina, descendiente de una familia originaria de Langedoc. Luego del nacimiento de Pierre, dio a luz dos mellizas, Marie y Antoniette y en 1872 un varón, Jean. A los tres días del nacimiento él y Antoniette fallecieron debido a un crup.

Inicialmente, Pierre fue educado por sus padres, pero a los siete años fue enviado a estudiar al instituto de las Stas. Arnoul, donde integrando un pequeño grupo de cuatro alumnos, aprendió gramática, aritmética, catecismo y las primeras nociones de latín.

---

[1] En muchos textos figura como nacido el 10 de junio de ese año, pero ese día fue registrado su nacimiento en la Alcaidía de París.

El estallido de la guerra franco prusiana, en julio de 1870 y el avance de las tropas alemanas sobre París hizo que la familia Duhem, huyera a Burdeos, de donde regresó después del armisticio, pero vivieron en París la insurrección de la "Comuna" con sus decretos anticlericales, — como la separación de la Iglesia del Estado — y otros decretos que a esa familia ultracatólica los afectó emocionalmente.

Fue en 1872 que Pierre Duhem ingresó como medio pupilo al Collège Stanislas, una escuela católica, donde estudió durante diez años. Su profesor de Física en ese establecimiento fue Jules Moutier, quien había trabajado con Henri Sainte-Claire Deville en la École Normal Supérieure y que en 1872 había publicado *Éléments de Thermodynamique*[2]. Su carisma y su forma de enseñar, hicieron que Duhem se volcara principalmente al estudio de esa rama de la ciencia.

En 1882, Duhem ingresó a la *École Normal Supérieure*. A pesar de las recomendación del Abate Lagarde, Director del Collège Stanislas, y de las sugerencia de su madre, para que siguiera la carrera de Letras, Duhem eligió estudiar Ciencias. En esa escuela es costumbre ordenar a los alumnos en función de su rendimiento educativo. Ya desde el primer año, Duhem fue distinguido como el primero de su clase en la Sección Ciencias[3] y permaneció en ese puesto durante toda su estadía en la École. En la École estuvo cinco años, los primeros tres como estudiante regular y los últimos dos como *Agrégué préparateur de Physique*, una suerte de ayudante-alumno, encargado de orientar y ayudar a los estudiantes en sus problemas de clase, preparar el material de laboratorio, supervisar los trabajos prácticos, etc., sin desmedro de seguir profundizando sus estudios. Durante su último año en la École, Louis Pasteur que hacía investigaciones en uno de los laboratorios, le ofreció un cargo de Asistente químico-bacteriólogo. Pero Duhem no lo aceptó pues su interés era profundizar en los aspectos teóricos de la Física y la Termodinámica.

En 1884, presentó su tesis doctoral en la que trataba el potencial termodinámico en Física y Química, en la cual definía el criterio para la posibilidad de ocurrencia de una reacción, a una temperatura y presión dadas, en términos de la variación de energía libre asociada a ese proceso. En esta tesis, rechazaba el criterio de espontaneidad sostenido por Marcellin Berthelot basado en el calor asociado a dicha transformación, por lo que, a una determinada temperatura y presión, sólo podían ocurrir espontáneamente las reacciones exotérmicas[4]. En esa época Berthelot, reconocido

[2] En 1885, J. Moutier publicó *La thermodynamique et ses principales applications*, (Gauthier – Villars, Paris), que luego Duhem citaría en la bibliografía de sus trabajos sobre Termodinámica Química.

[3] La noche de su examen de admisión, el 2 de agosto de 1882, uno de sus examinadores, Désiré Jean-Baptiste Gernez, le escribió a Jean-Baptiste Dumas: "Me complace anunciar que después del examen de ingreso a la École Normale Supérieure, el Sr. Duhem fue el primero de la lista con una marcada superioridad sobre sus competidores. Este joven parece digno en todos los aspectos del interés que se le pueda mostrar, y creo que le dará honor a la Escuela Normal. Dumas, le reenvió la carta a los padres de Duhem, con una nota; "La carta del Sr. Gernez, colmará de placer a la familia del Sr. Duhem".

[4] Principe du travail maximum.– "*Toute changement chimique accompli sans l'intervention de une énergie étrangère tend vers la production du corps ou du système de corps qui dégage le plus de chaleur.*" [...] "*Toute réaction chimique susceptible d'être accomplie sans le concours d'un travail préliminaire et en dehors de l'intervention d'une énergie étrangère à celle des corps présents dans le système, se produit nécessairement, si elle dégage de la chaleur.*" M. Berthelot,(1879) *Essai de mécanique chimique fondée sur la thermochimie*, T. I, Dunod éditeur, Paris, p. XXIX.

por sus actividades científicas, era senador vitalicio y un político republicano muy influyente[5]. El Jurado, presidido por Gabriel Lippman[6] consideró que el criterio de espontaneidad sostenido por Duhem era incorrecto por lo que rechazó su tesis. Duhem, que estaba convencido de su teoría, la que concordaba perfectamente con los desarrollos de Gibbs, publicó su tesis con el nombre de *Le Potentiel thermodynamique et ses applications a la Mécanique Chimique et a l'étude des phénomènes électriques*.[7] El enfrentamiento con la teoría, incorrecta, de Berthelot se hizo muy conocida en la comunidad científica francesa y, se supone, que, debido a ello, se le atribuye a Berthelot haber dicho públicamente " Este joven no podrá enseñar nunca en París". Efectivamente, Duhem trabajó en Lille, en Rennes y en Bordeaux, pero nunca fue aceptado su pedido de trabajar como docente en París.

En 1888, Duhem defendió su tesis en la Universidad de París, obteniendo el título de Doctor en Ciencias Matemáticas ante un jurado formado por Edmond Bouty, Gastón Darboux y Henri Poincaré. Curiosamente la tesis versó sobre un problema de electromagnetismo, cuyo título fue "*De l'aimantation par influence*"

Trabajando como "Maître de conférences" en la Faculté du Sciences de Lille, en 1891 redactó y publicó los dos volúmenes de su "*Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*"; al año siguiente publicó los tres volúmenes de su "*Leçons sur l'électricité et le magnétisme*" y en 1893, su "*Introduction à la mécanique chimique*", que se convertiría en un texto clásico sobre esta materia. En los seis años que ejerció la docencia en Lille, hizo una sesenta publicaciones entre artículos y memorias.

En 1890, se casó con Adèle Chayet con quien, al año siguiente, tuvo una hija, Hélène. Adèle falleció en 1892 a poco de dar a luz su segundo hijo, que sobrevivió unos pocos días.

En octubre de 1893, dejó el cargo en Lille y fue nombrado "Maître de conférences" en la Faculté des Sciences de Rennes, donde trabajó sólo un año. En 1894, solicitó el traslado a París pero el Ministerio de Instrucción Pública lo nombró Maître de conférences en la Faculté des Sciences de Bordeaux, donde tomó el cargo en octubre de 1894. Duhem reclamó a través de su amigo, Jules Tannery, ya que había varias vacantes en la Sorbonne y Louis Liard, entonces Director de Enseñanza superior en el Ministerio de Instrucción Pública le dijo a Tannery que Duhem debía aceptar el puesto porque "*Bordeaux c'est le chemin de Paris*". Aunque en 1901 le escribió a Liard reclamando el traslado a París, en Bordeaux quedaría por el resto de su vida.

Los motivos de la reticencia de las autoridades francesas a que trabajara en la Sorbonne, deben buscarse más allá de la oposición de Berthelot quien, a pesar de todo, en diciembre de 1900, cuando se propuso a Duhem como corresponsal de la Academia de Ciencias en la Sección Mecánica, votó a

---

[5] Entre 1886 y 1887 fue Ministro de Instrucción Pública y Bellas artes de Francia. En 1895 fue Ministro de Relaciones exteriores.

[6] Gabriel Lippman (1845 – 1921), fue un físico amigo personal de Marcellin Berthelot y Duhem consideró que el rechazo de su tesis se debió a la opinión de Berthelot. Lippman fue galardonado con el Premio Nobel de Física de 1908.

[7] A. Herman, Libraire scientifique, Paris, 1886.

favor de su incorporación diciendo "Aquí sólo se deben considerar los méritos científicos de Duhem"

En octubre de 1894, estalló el caso Dreyfus[8], que conmocionó a Francia y cuyo desarrollo repercutió en buena parte del mundo. Este caso produjo una grieta en la sociedad francesa. Por un lado los que estaban a favor de la inocencia de Dreyfus eran mayoritariamente, republicanos y liberales. En cambio los que estaban en contra, eran mayoritariamente, nacionalistas, conservadores, clericales, monárquicos, antisemitas o conservadores.

Pierre Duhem era monárquico[9], simpatizante de la Action française[10] y católico practicante. Fue miembro de la *Ligue de la patrie française*, una organización nacionalista y antidreyfus, creada el 4 de enero de 1899 que, en el primer mes, asoció a unos 30.000 miembros, siendo Duhem uno de los primeros. Según su hija, Duhem hasta se oponía a los sillonistas[11], se consideraba opositor a los republicanos a quienes asignaba raíces ateístas. También denostaba a los judíos, su propia hija decía que era antisemita, aunque tuvo "buenas relaciones con algunos colegas judíos",[12] y apoyó el procesamiento de Dreyfus.

---

[8] En octubre de 1894, el capitán Alfred Dreyfus, ingeniero militar nacido en Alsacia (región que había pertenecido a Alemania) y de religión judía, fue acusado de haber entregado a los alemanes documentos secretos. Fue condenado por un tribunal militar a prisión perpetua y desterrado a la Isla del Diablo, frente a la costa de la Guayana francesa. Su familia trató de probar su inocencia y el Jefe del servicio de contraespionaje francés, comprobó en 1896, que los documentos fueron entregados por otro militar. A pesar de su denuncia, el Estado Mayor francés la desestimó y ordenó su traslado a África. Esto motivó a que el Presidente del Senado corroborase la inocencia de Dreyfus a la vez que la familia de Dreyfus denunció al verdadero traidor ante el Ministerio de Guerra. Sin embargo, el Tribunal militar absolvió a este hombre. El caso había tomado estado público y dividió a la sociedad francesa entre *dreyfusards*, fueron los primeros defensores de Dreyfus, los *dreyfusistes*, quienes sobre la base de la injusticia cometida con Dreyfus sostenían la necesidad de realizar reformas políticas y sociales, los *dreyfusiens*, que abogaban por la secularización de la sociedad francesa. Entre los que estaban a favor de Dreyfus, se contaban intelectuales, liberales, republicanos, lo que hoy llamaríamos "progresistas". Los opositores a Dreyfus se identificaban como *antidreyfusistes*. En este último bando adherían sectores, nacionalistas, clericales, antisemitas, monárquicos y conservadores.

Uno de los motores de la defensa de Dreyfus fue el escritor Émile Zola, cuyo alegato "*J'Accuse*" tuvo gran repercusión provocando la adhesión de muchísimos "intelectuales" (término acuñado precisamente a raíz de ese libro). En 1898, ante la negativa del Ejército de aceptar su inocencia, Dreyfus fue indultado por el Presidente y en 1906, La Corte de Casación anuló todos los fallos de los Tribunales militares, exonerando a Dreyfus de toda culpa y ordenando su reincorporación al Ejército con el grado de Comandante.

[9] Su biógrafo, Stanley Jaki, sostuvo que Pierre Duhem era monárquico por respeto a su madre, que era "una ardiente monárquica". S. Jaki. Uneasy Genius: The Life And Work Of Pierre Duhem, The Hague, Kluwer Academic Publishers, 1984. Página 160.

[10] Movimiento político francés, de derecha, que expresaba sus ideas, entre otros medios, por un periódico del mismo nombre, que bajo la influencia de Charles Maurras, expresaba sus ideas monárquicas, en contra de los ideales de la Revolución francesa, de tendencia clerical y antisemita.

[11] Movimiento creado en 1894 por el periodista y político francés, Marc Sangnier (1853 – 1950), que promovía un catolicismo democrático y progresista, quien fundó el periódico "Le sillon". La hija de Duhem, Hélène, relata uno de los comentarios despectivos de su padre hacia ese movimiento en su libro "*Un Savant Français, Pierre Duhem*", Paris, Libraire Plon, 1936. página 140. En la página 127, Hélène comentó que Albert Dufourcq le dijo que Pierre Duhem, le había prestado el libro de Charles Maurras "*Dilemme de Marc Sangnier*", diciéndole que estaba en un todo de acuerdo con Maurras sobre la democracia cristiana.

[12] Hélène Pierre Duhem, "*Un Savant Français, Pierre Duhem*", Paris, Libraire Plon, 1936. página 139.

La Tercera República se había establecido en 1870 y el régimen republicano gozaba del aprecio de la mayoría de la población francesa. A fines del siglo XIX, los monárquicos eran una minoría, no muy bien vista por el resto de la población. Por eso, Duhem, conocido por sus ideas, no era bien visto en los círculos oficiales e intelectuales de Paris. No obstante, su frondosa producción científica hizo que le ofrecieran la cátedra de Historia de la Ciencia en el College de France, pero él la rechazo diciendo que era un físico y que no quería entrar en la docencia universitaria parisina por la puerta trasera.

En 1913, fue electo miembro (no residente[13]) del Institut de France

De su obra se evidencia netamente su actitud positivista ante la ciencia, a pesar de su profunda religiosidad. En lo referente a la Termodinámica, adhirió a las concepciones de los "energéticos". Si bien se les atribuye a Ernst Mach y a Wilhelm Ostwald, el término fue acuñado bastante antes por William John Macquorn Rankine, que se popularizó a través de su libro *Outlines of the Science of Energetics*. La primera proposición fundamental de los energéticos, era exactamente igual a la de Clausius, expresaba el principio de la conservación de la energía; pero la segunda proposición, que supuestamente formulaba la dirección de los fenómenos, postulaba una analogía perfecta entre el paso del calor de una temperatura más alta a otra más baja y la caída de un peso desde una altura mayor a una menor. De esta manera se trataba de adaptar las leyes de la Mecánica a la Termodinámica. como comentó Max Planck[14], eso implicaba que no era necesario establecer la irreversibilidad de un proceso físico, en el que sólo ocurriesen cambios de estado o de estructura cristalina, para probar el segundo principio de la Termodinámica. Más aún, carecía de sentido hablar del cero absoluto ya que tanto en la temperatura como en la altura lo único que pueden medirse son diferencias.

Al igual que en el positivismo de Mach y de Ostwald, para Duhem era innecesaria la comprobación de la existencia real de los átomos. Es de suponer que debe haber estado de acuerdo con la pregunta que Ostwald le hizo a Boltzmann:¿ Pero gordito, alguna vez viste un átomo? Como positivista, Duhem era escéptico a las teorías de Boltzmann que intentaban vincular las propiedades de las partículas submicroscópicas con los fenómenos macroscópicos. Sin embargo, en 1904, cuando Boltzmann cumplió 60 años, participó en el *Festschrift*[15]que escribieron 117 prominentes científicos de diversas partes del mundo (Estados Unidos, Rusia, Francia, Australia, Alemania y Japón entre otros)

En lo que respecta al electromagnetismo, adhirió a las concepciones de Hermann von Helmholtz. Su crítica respecto de la obra de Maxwell se desarrollará en las secciones siguientes.

A partir de su nominación en la Académie desarrolló un poco más actividades sociales. Con el estallido de la Primera guerra, contribuyó a la ayuda de viudas y huérfanos de combatientes franceses.

---

[13] Se llamaban "no residentes" a los que no residían en París.
[14] **Planck, M.**, (**1948**):*Wissenschaftliche Selbstbiographie,* J.A. Barth, Leipzig, Pág. 8.
[15] Artículo homenaje.

En agosto de 1916, viajó a Cabrespine a encontrarse con su hija que estaba viviendo en París. El 2 de septiembre tuvo un infarto. Cuando parecía que se iba a recuperar tuvo otro ataque al corazón, luego de unos días de reposo, el 14 de septiembre intentó levantarse pero su corazón no resistió y falleció.

Dejó varios trabajos manuscritos, listos para la imprenta.

A lo largo de su carrera, Pierre Duhem recibió varias distinciones:

En 1902, fue nombrado Asociado extranjero en la Académie Royale de Belgique.

En 1905, fue electo miembro extranjero de la Akademia Umiejętności de Cracovia.

En 1907, la Académie des Sciences de Paris, le otorgó el Premio Petit d' Ormoy (10.000 francos).

En 1909, la Societé Néerlandaise de Physique lo nombró miembro correspondiente.

En 1912, el Reale Istituto Veneto de Scienze, Lettere e Arte, lo nombró miembro extranjero.

Ese mismo año, Reale Accademia delle Scienze di Padova, lo nombró asociado honorario.

En 1913, fue electo Miembro no residente del Institut de France.

Las publicaciones de Pierre Duhem [16]:

Duhem publicó unos cuatrocientos trabajos y treinta y dos libros en 45 volúmenes. Sus principales obras son:

1884. "Recherches de M. Helmholtz sur l'origine de la chaleur voltaïque", en colaboración con M. J. Moutier, *La Lumière Électrique*, 6 année, t. XIII, 23 août 1884, n˚34, pp. 281 – 286 et 30 août 1884, n˚35, pp. 331-334.

1884. Sur le potentiel thermodynamique et la théorie de la pile voltaïque / note présentée par M. Ch. Hermite le 22 décembre, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. XCIX, 1884, 2e. semestre, n˚25, pp. 1113-1115.

1885. Applications de la thermodynamique aux phénomènes capillaires, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, t. II, juin 1885, pp. 207 – 254.

[16] Se indican los trabajos más importantes de Pierre Duhem. No se incluyen sus comentarios sobre trabajos de terceros publicados en distintas revistas, ni las respuestas a comentarios publicados sobre sus propios trabajos, ni los trabajos de sus doctorandos, etc. Para una información completa de sus publicaciones ver: Jean François Stoffel: *Pierre Duhem et ses doctorands, Bibliographie de la littérature primaire et secondaire.* Louvain-la-Neuve. Centre interfacultaire d'étude en histoire des sciences (1996) ISBN 2-930175-00-1. pp. 25 – 312.

1885. Applications de la thermodynamique aux phénomènes thermoélectriques et pyro-électriques. - Première partie : Phénomènes thermoélectriques, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, t. II, décembre 1885, pp. 405 – 424.

1885. Sur la théorie de l'induction électrodynamique / note présentée par M. Ch. Hermite le 5 janvier, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. C, 1885, 1er semestre, n°1, pp. 44 – 46.

1885. Sur le renversement des raies du spectre, in Journal de Physique Théorique et Appliquée, 2e série, t. IV, mai 1885, pp. 221-225.

1886. Applications de la thermodynamique aux phénomènes thermoélectriques et pyro-électriques. – Deuxième partie : Phénomènes pyro-électriques, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, t. III, août 1886, pp. 263 – 302.

1886. *Le potentiel thermodynamique et ses applications à la mécanique chimique et à l'étude des phénomènes électriques*, A. Hermann, Libraire Scientifique, Paris.

1886. Sur la capacité calorifique des combinaisons gazeuses dissociables, *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 2e série, t. V, juillet 1886, pp. 301 – 323.

1886. Sur la condensation des vapeurs / note présentée le 28 juin, in *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CII, 1886, 1er semestre, n°26, pp. 1548 – 1549.

1886. Sur la loi d'Ampère, *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 2e série, t. V, janvier 1886, pp. 26 – 29.

1886.. Sur la tension de vapeur saturée / note présentée par M. H. Debray le 22 novembre, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CIII, 1886, 2e semestre, n°21, pp. 1008 – 1009.

1886. Sur les corps hygrométriques, *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 2e série, t. V, mars 1886, pp. 103 – 116.

1886. Sur les vapeurs émises par un mélange de substances volatiles / note présentée par M. H. Debray le 21 juin, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CII, 1886, 1er semestre, n°25, pp. 1449 – 1451.

1886. Traduction de Gustav Kirchhoff : «Sur la théorie des rayons lumineux», *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, t. III, septembre 1886, pp. 303 – 341.

1887. Étude sur les travaux thermodynamiques de M. J. Willard Gibbs. – Première partie: Examen du deuxième principe de la thermodynamique, in *Bulletin des Sciences Mathématiques*, t. XXII (2e série, t. XI), juin 1887, 1 partie, pp. 122 – 148.

1887. Étude sur les travaux thermodynamiques de M. J. Willard Gibbs. – Seconde partie: Historique et principales applications de la théorie de M. Gibbs, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, t. XXII (2e série, t. XI), juillet 1887, 1er partie, pp. 159 – 176.

1887. ,Sur l'aimantation par influence / note présentée par M. G. Darboux le 24 octobre, in Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, t. CV, 1887, 2e semestre, n˚17, pp. 749 – 751.

Sur l'aimantation par influence / note présentée par M. G. Darboux le 31 octobre, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CV, 1887, 2e semestre, n˚18, pp. 798 – 800.

1887. Sur l'aimantation par influence / note présentée par M. G. Darboux le 5 décembre, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CV, 1887, 2e semestre, n˚23, pp. 1113 – 1115.

1887. Sur l'aimantation par influence / note présentée par M. G. Darboux le 19 décembre, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CV, 1887, 2e semestre, n˚25, pp. 1240 – 1241.

1887. ,Sur la chaleur spécifique d'une dissolution saline / note présentée par M. H. Debray le 14 mars, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CIV, 1887, 1er semestre, n˚11, pp. 780-781.

1887. Sur la hauteur osmotique, *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 2e série, t. VI, mars 1887, pp. 134 – 147.

1887. À propos de J.- H. Van t"Hoff, L'équilibre chimique dans les systèmes gazeux ou dissous à l'état dilué, *Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles*, t. XX, 1886, pp. 239 – 302.

1887. Sur la pression électrique et les phénomènes électrocapillaires / note présentée par M. H. Debray le 3 janvier, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CIV, 1887, 1er semestre, n˚1, pp. 54 – 56.

1887. Sur la pression osmotique, *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 2e série, t. VI, septembre 1887, pp. 397 – 414.

1887. Sur la relation qui lie l'effet Peltier à la différence de niveau potentiel de deux métaux en contact, in *Annales de Chimie et de Physique*, 6e série, t. XII, décembre 1887, pp. 433 – 471.

1887. Sur la théorie du magnétisme / note présentée par M. G. Darboux le 14 novembre, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CV, 1887, 2e semestre, n˚20, pp. 932 – 934.

1887. Sur le phénomène de Peltier dans une pile hydro-électrique / note présentée par M. H. Debray le 13 juin, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CIV, 1887, 1er semestre, n°24, pp. 1697-1699.

1887. Sur les vapeurs émises par un mélange de substances volatiles, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, t. IV, janvier 1887, pp. 9-60.

1887. Sur quelques formules relatives aux dissolutions salines / note présentée par M. H. Debray le 7 mars, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CIV, 1887, 1er semestre, n°10, pp. 683 – 685.

1887. Sur quelques formules relatives aux dissolutions salines, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, t. IV, décembre 1887, pp. 381 – 405.

1887. Sur une relation entre l'effet Peltier et la différence de niveau potentiel entre deux métaux / note présentée par M. H. Debray le 6 juin, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CIV, 1887, 1er semestre, n°23, pp. 1606 – 1609.

1887. Sur une théorie des phénomènes pyro-électriques, *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 2e série, t. VI, août 1887, pp. 366 – 373.

1888. Applications de la thermodynamique aux actions qui s'exercent entre les courants électriques, *Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XVI, 1888, pp. 229 – 332.

1888. Compte rendu de Émile Mathieu : «Théorie de l'électrodynamique» (1888), *Bulletin des Sciences Mathématiques*, t. XXII (2e série, t. XII), octobre 1888, 1er partie, pp. 229 – 241.

1888. De l'aimantation par influence, in *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, t. II, 1888, pp. L1 – L138.

1888. *De l'Aimantation par Influence. Suivi de Propositions Données par la Faculté*, Gauthier-Villars et Fils. Paris.

1888. Thèse présentée à la Faculté des sciences de Paris, le 30 octobre 1888, pour l'obtention du grade de Docteur dès sciences mathématiques. Compte rendu: J. Tannery, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, t. XXIII (2e série, t. XIII), octobre 1889, 1er partie, pp. 252 – 255.

1888. De l'influence de la pesanteur sur les dissolutions, *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 2e série, t. VII, septembre e 1888, pp. 391 – 419.

1888. Étude historique sur la théorie de l'aimantation par influence, *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, t. II, 1888, pp. 1 – 40.

1888. Sur l'aimantation des corps diamagnétiques / note présentée par M. É. Mascart le 12 mars, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CVI, 1888, 1er semestre, n°11, pp. 736 – 738.

1888. Sur la liquéfaction de l'acide carbonique en présence de l'air, *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 2e série, t. VII, avril 1888, pp. 158 – 168.

1888. Sur la pression électrique et les phénomènes électrocapillaires. – Première partie : De la pression électrique, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, t. V, mars 1888, pp. 97 – 146.

1888. Sur les équilibres chimiques / note présentée par M. H. Debray le 13 février, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CVI, 1888, 1er semestre, n˚7, pp. 485 – 487.

1888. À propos de H. Le Châtelier, Sur les lois de l'équilibre chimique / note présentée par M. A. Daubrée le 30 janvier, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CVI, 1888, 1er semestre, n˚5, pp. 355 – 357.

1888. Sur les lois de l'équilibre chimique : Réponse à M. H. Le Châtelier / note présentée le 19 mars, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CVI, 1888, 1er semestre, n˚12, pp. 846 – 849.

1888. Sur quelques propriétés des dissolutions, *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 2e série, t. VII, janvier 1888, pp. 5 – 25.

1888. Sur un mémoire de M. Max Planck ayant pour titre : «Sur le principe de l'accroissement de l'entropie», *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 2e série, t. VII, mars 1888, pp. 124 – 127.

1888. Sur un mémoire de M. Robert von Helmholtz*: «Sur la variation du point de congélation», in Journal de Physique Théorique et Appliquée, 2e série, t. VII, mars 1888, pp. 122 – 123.

1888. Sur une formule de M. Frowein, *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 2e série, t. VII, juillet 1888, pp. 316 – 321.

1889. Compte rendu de H. Resal : «Traité de physique mathématique» (1887, 1888), *Bulletin des Sciences Mathématiques*, t. XXIII (2e série, t. XIII), novembre 1889, 1er partie, pp. 265 – 272.

1889. Des corps diamagnétiques. – Lille: Au siège des Facultés, 1889. – 71 p. – (*Travaux et Mémoires des Facultés de Lille*; tome I, mémoire n˚2).

1889. Quelques remarques sur les mélanges de substances volatiles, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, t. VI, mai 1889, pp. 153 – 156.

1889. , Sur l'équivalence des courants et des aimants, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, t. VI, septembre 1889, pp. 297 – 326.

* (1862 - 1889) Era hijo de Hermann von Helmholtz.

1889. Sur l'impossibilité des corps diamagnétiques / note présentée par M. G. Darboux le 20 mai, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences,* t. CVIII, 1889, 1er semestre, n˚20, pp. 1042 –1043.

1889. Sur la pression électrique et les phénomènes électrocapillaires. – Deuxième partie : Des phénomènes électrocapillaires, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure,* 3^{e} série, t. VI, juin 1889, pp. 183 – 256.

1889. Sur la transformation et l'équilibre en thermodynamique / note présentée le 1 avril, *Comptes rendus Hebdomadaires des er Séances de l'Académie des Sciences,* t. CVIII, 1889, 1er semestre, n˚13, pp. 666 – 667.

1890. Compte rendu de Joseph Bertrand: «Leçons sur la théorie mathématique de l'électricité» (1890), *Bulletin des Sciences Mathématiques,* t. XXIV (2^{e} série, t. XIV), février 1890, 1er partie, pp. 41 – 55.

1890. Des principes fondamentaux de l'hydrostatique, *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse,* t. IV, 1890, pp. C1 – C35.

1890. Sur le déplacement de l'équilibre, *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse,* t. IV, 1890, pp. N1 – N9.

1890. Sur les dissolutions d'un sel magnétique, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure,* 3^{e} série, t. VII, septembre 1890, pp. 289 – 322.

1891. Applications de la thermodynamique aux actions qui s'exercent entre les courants électriques et les aimants, *Acta Societatis Scientiarum Fennicæ,* t. XVIII, 1891, pp. 1 – 100.

1891. *Hydrodynamique, élasticité, acoustique*. – Tome 1 : Théorèmes généraux. Les corps fluides. – Paris : Librairie Scientifique A. Hermann, 1891. – IV, 378 p. – (Cours de physique mathématique et de cristallographie de la Faculté des sciences de Lille).

1891 *Hydrodynamique, élasticité, acoustique*. – Tome 2 : Les fils et les membranes. Les corps élastiques. L'acoustique. – Paris: Librairie Scientifique A. Hermann, 1891. – IV, 310 p. – (Cours de physique mathématique et de cristallographie de la Faculté des sciences de Lille).

1891. *Leçons sur l'électricité et le magnétisme*. – Tome 1: *Les corps conducteurs à l'état permanent*. – Paris : Gauthier-Villars et Fils Imprimeurs-Libraires, 1891. – VIII, 560 p.

1891. *Sur la continuité entre l'état liquide et l'état gazeux et sur la théorie générale des vapeurs*. – Lille: Au siège des Facultés, 1891. – 105 p. – (*Travaux et Mémoires des Facultés de Lille* ; tome I, mémoire n˚5).

1891. Sur la théorie de la pile / note présentée par M. G. Darboux le 26 octobre, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXIII, 1891, 2^{e} semestre, n˚17, pp. 536 – 537.

1891. Sur les équations générales de la thermodynamique, Annales *Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, t. VIII, août 1891, pp. 231 – 266.

1891. Sur les pressions à l'intérieur des milieux magnétiques ou diélectriques / note présentée par M. G. Darboux le 31 mars, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXII, 1891, 1er semestre, n°13, pp. 657 – 658.

1891. Über den dreifachen Punkt / traduit par W. Ostwald, *Zeitschrift für physikalische Chemie*, t. VIII, 11 septembre 1891, n°4, pp. 367 – 382.

1891. Über ein Theorem von J. Willard Gibbs / traduit par W. Ostwald, *Zeitschrift für physikalische Chemie*, t. VIII, 11 septembre 1891, n°4, pp. 337 – 339.

1892. Commentaire aux principes de la thermodynamique. – Première partie : Le principe de la conservation de l'énergie, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 4e série, t. VIII, 1892, n°3, pp. 269 – 330.

1892. Compte rendu de Henri Poincaré : «Leçons sur la théorie de l'élasticité» (1892), *Revue des*

1892. Émile Mathieu, his life and works (1835-1890), *Bulletin of the New York Mathematical Society*, vol. I, 1892, pp. 156 – 169.

1892. *Leçons sur l'électricité et le magnétisme*. – Tome 2: *Les aimants et les corps diélectriques.* – Paris: Gauthier-Villars et Fils Imprimeurs-Libraires, 1892. – 480 p.

1892. *Leçons sur l'électricité et le magnétisme*. – Tome 3: *Les courants linéaires*. – Paris: Gauthier-Villars et Fils Imprimeurs Libraires, 1892. – VI, 528 p.

1892. Notation atomique et hypothèses atomistiques, *Revue des Questions Scientifiques*, 16e année, t. XXXI (2e série, t. I), avril 1892, pp. 391 – 454.

1892. Quelques réflexions au sujet des théories physiques, *Revue des Questions Scientifiques*, 16e année, t. XXXI (2e série, t. I), janvier 1892, pp. 139 – 177.

1892. Sur la déformation électrique des cristaux, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, t. IX, juin 1892, pp. 167 – 176.

1892. Sur la détente des vapeurs, *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 3e série, t. I, novembre 1892, pp. 470 – 474.

1892. *Sur la dissociation dans les systèmes qui renferment un mélange de gaz parfaits*. – Lille : Au siège des Facultés, 1892. – 215 p. – (*Travaux et Mémoires des Facultés de Lille* ; tome II, mémoire n°8).

1892. Sur le déplacement de l'équilibre, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, t. IX, décembre 1892, pp. 375 – 379.

1893. Commentaire aux principes de la thermodynamique. – Deuxième partie: Le principe de Sadi Carnot et de R. Clausius, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées,* 4^{e} série, t. IX, 1893, n˚3, pp. 293 – 359.

1893. *Dissolutions et mélanges*. – Premier mémoire: *L'équilibre et le mouvement des fluides mélangés*. – Lille : Au siège des Facultés, 1893. – 136 p. – (*Travaux et Mémoires des Facultés de Lille* ; tome III, mémoire n˚11).

1893. *Dissolutions et mélanges*. – Deuxième mémoire: *Les propriétés physiques des dissolutions*. – Lille : Au siège des Facultés, 1893. – 138 p. – (*Travaux et Mémoires des Facultés de Lille* ; tome III, mémoire n˚12).

1893. *Introduction à la mécanique chimique*. – Gand : Librairie Générale de Ad. Hoste Éditeur, 1893, 177 p.

1893. L'école anglaise et les théories physiques: À propos d'un livre récent de W. Thomson, *Revue des Questions Scientifiques,* 17^{e} année, t. XXXIV (2^{e} série, t. IV), octobre 1893, pp. 345 – 378.

1893. Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure,* 3^{e} série, t. X, juin 1893, pp. 183 – 230.

1893. Les actions électrodynamiques et électromagnétiques. – Chapitre préliminaire : Les fonctions d'Helmholtz. Première partie : Les forces électrodynamiques, *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, t. VII, 1893, pp. G1 – G52.

1893. Note sur les conditions de fusion de la glace en présence du chlorure de sodium / note présentée le 11 mars, *Bulletin de la Société Chimique du Nord de la France*, t. III, 1893, pp. 55-60.

1893. Physique et métaphysique, *Revue des Questions Scientifiques*, 17^{e} année, t. XXXIV (2^{e} série, t. IV), juillet 1893, pp. 55 – 83.

1893. Physique et métaphysique, *Annales de Philosophie Chrétienne*, 63^{e} année, t. CXXVII (nouvelle série, t. XXVIII), aoûte septembre 1893, n˚5 - 6, pp. 461 – 486.

1893. Sur les lois générales de l'induction électrodynamique, *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, t. VII, 1893, pp. B1 – B28.

1893. Sur les phénomènes de volatilisation apparente, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 17^{e} année, 1893, 2^{e} partie, pp. 93 – 102.

1893. Une nouvelle théorie du monde inorganique, *Revue des Questions Scientifiques*, 17^{e} année, t. XXXIII (2^{e} série, t. III), janvier 1893, pp. 90 – 133.

1894. Commentaire aux principes de la thermodynamique. – Troisième partie : Les équations générales de la thermodynamique, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 4^{e} série, t. X, 1894, n˚2, pp. 207 – 285.

1894. *Dissolutions et mélanges*. – Troisième mémoire : *Les mélanges doubles*. – Lille: Au siège des Facultés, 1894. – 138 p. – (*Travaux et Mémoires des Facultés de Lille* ; tome III, mémoire n˚13)

1894. Fragments d'un cours d'optique. – Premier fragment : Le principe de Huygens, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 18^{e} année, 1894, 2^{e} partie, pp. 95 – 123.

1894. Les actions électrodynamiques et électromagnétiques. – Deuxième partie : Les actions électromagnétiques, *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, t. VIII, 1894, pp. A5 – A57.

1894. Les théories de l'optique, *Revue des Deux Mondes*, t. CXXIII, 1 mai 1894, pp. 94 – 125.

1894. Quelques réflexions au sujet de la physique expérimentale, *Revue des Questions Scientifiques*, 18^{e} année, t. XXXVI (2^{e} série, t. VI), juillet 1894, pp. 179 – 229.

1894. Sur l'hystérésis et les déformations permanentes / note présentée par M. G. Darboux le 30 avril, in *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXVIII, 1894, 1^{er} semestre, n˚18, pp. 974 – 975.

1894. Théorèmes généraux sur l'état des corps en dissolution, *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 3^{e} série, t. III, février 1894, pp. 49 – 64.

1895. De l'influence que les actions capillaires exercent sur un corps flottant, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3^{e} série, t. XII, juillet 1895, pp. 211 – 226.

1895. Fragments d'un cours d'optique. – Deuxième fragment : Coup d'œil sur l'optique ancienne. L'optique de Young, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 19^{e} année, 1895, 2^{e} partie, pp. 27 – 94.

1895. *Le potentiel thermodynamique et ses applications à la mécanique chimique et à l'étude des phénomènes électriques*. – 2^{e} tirage. – Paris: Librairie Scientifique A. Hermann, 1895, 247 p.

1895. Les théories de la chaleur. – I: Les précurseurs de la thermodynamique, *Revue des Deux Mondes*, t. CXXIX, 15 juin 1895, pp. 869 – 901.

1895. Les théories de la chaleur. – II : Les créateurs de la thermodynamique, *Revue des Deux Mondes*, t. CXXX, 15 juillet 1895, pp. 380 – 415.

1895. ,Les théories de la chaleur. – III : Chaleur et mouvement, *Revue des Deux Mondes*, t. CXXX, 15 août 1895, pp. 851 – 868.

1895. Quelques remarques au sujet de l'électrodynamique des corps diélectriques proposée par J. Clerk Maxwell, dans *Compte rendu du troisième congrès scientifique international des catholiques* tenu à Bruxelles du 3 au 8 septembre 1894. Septième section: *Sciences mathématiques et naturelles*. – Bruxelles : Société Belge de Librairie, 1895. – pp. 246 – 269.

1895. Sur l'interprétation théorique des expériences hertziennes / communication présentée le 6 août 1895, dans *Compte rendu de la 24 session de l'Association française pour l'avancement des sciences* : Bordeaux, 1895. Première partie : Documents officiels & procès-verbaux. – Paris: Secrétariat de l'Association ; G. Masson, 1895. – p. 219.

1895. Sur l'interprétation théorique des expériences hertziennes, *L'Éclairage Électrique*, 2 année, t. IV, 14 septembre 1895, n°37, pp. 494 – 502.

1895. Sur la pression dans les milieux diélectriques ou magnétiques, *American Journal of Mathematics*, t. XVII, 1895, pp. 117 – 167.

1895. Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 5^{e} série, t. I, 1895, n°2, pp. 91 – 180.

1896. De l'influence qu'un chargement liquide exerce sur la stabilité d'un navire, *Bulletin de l'Association Technique Maritime*, 1896, n°7, pp. 43 – 50.

1896. Fragments d'un cours d'optique. – Troisième fragment : L'optique de Fresnel, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 20 année, 1896, 2^{e} partie, pp. 27 – 105.

1896. L'évolution des théories physiques du XVII siècle jusqu'à nos jours, *Revue des Questions Scientifiques*, 20^{e} année, t. XL (2^{e} série, t. X), octobre 1896, pp. 463 – 499.

1896. Sur l'électrodynamique des milieux diélectriques. – I mémoire: Propriétés fondamentales des courants de déplacement, *Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 5^{e} série, t. I, 1896, pp. 233 – 285.

1896. Sur l'électrodynamique des milieux diélectriques. – Second mémoire: Les équations générales de l'électrodynamique dans les milieux qui sont à la fois magnétiques et diélectriques, *Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 5^{e} série, t. I, 1896, pp. 287 – 293.

1896. Sur l'équivalence des flux de conduction et des flux de déplacement, *L'Éclairage Électrique*, 3^{e} année, t. VIII, 18 juillet 1896, n°29, pp. 110 – 112.

1896. Sur la propagation des actions électrodynamiques, *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, t. X, 1896, pp. B1 – B87.

1896. Sur la stabilité d'un navire qui porte du lest liquide, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 5^{e} série, t. II, 1896, n°1, pp. 23 – 40.

1896. *Sur les déformations permanentes et l'hystérésis*. – Premier mémoire: Sur les déformations permanentes et l'hystérésis. – Bruxelles : F. Hayez Imprimeur de l'Académie [...], 1896. – 61 p. – (Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers publiés par *l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique* ; tome LIV ; 4 fascicule).

1896. *Sur les déformations permanentes et l'hystérésis*. – II mémoire : Les e modifications permanentes du soufre. – Bruxelles : F. Hayez Imprimeur de l'Académie [...], 1896. – 86 p. – (Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers publiés par *l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique* ; tome LIV).

1896. *Sur les déformations permanentes et l'hystérésis*. – III mémoire : Théorie générale des modifications permanentes. – Bruxelles : F. Hayez Imprimeur de l'Académie [...], 1896. – 56 p. – (Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers publiés par *l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique* ; tome LIV).

1896. Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques, *Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 5^{e} série, t. II, 1896, pp. 1 – 207.

1896. *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*. – Paris : Librairie Scientifique A. Hermann, 1896. – 210 p.

1897. Conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant / note présentée le 7 janvier 1897, in *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 1896 – 1897, pp. 21 – 25.

1897. Die dauernden Aenderungen und die Thermodynamik. – I : Die dauernden Änderungen der Systeme, welche von einer einzigen normalen Veränderlichen abhängen / traduit par G. Bredig, *Zeitschrift für physikalische Chemie*, t. XXII, 18 mai 1897, n˚4, pp. 545 – 589.

1897. Die dauernden Aenderungen und die Thermodynamik. – II : Die Umwandlungen des Schwefels / traduit par G. Bredig, *Zeitschrift für physikalische Chemie*, t. XXIII, 29 juin 1897, n˚2, pp. 193 – 266.

1897. Die dauernden Aenderungen und die Thermodynamik. – III : Allgemeine Theorie der dauernden Änderungen / traduit par G. Bredig, *Zeitschrift für physikalische Chemie*, t. XXIII, 23 juillet 1897, n˚3, pp. 497 – 541.

1897. On the liquefaction of a mixture of two gases / traduit par J.E. Trevor, *The Journal of Physical Chemistry*, t. I, février 1897, pp. 273 – 297.

1897. Sur la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant à la surface d'un liquide compressible, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 5^{e} série, t. III, 1897, n˚4, pp. 389 - 403.

1897. Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 5e série, t. III, 1897, n˚2, pp. 151 – 193.

1897. Sur le problème général de la statique chimique / note présentée le 1 juillet 1897, in *Procès-verbaux des Séances de la Société er des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 1896-1897, pp. 118 – 124.

1897. Sur les déformations permanentes du verre : Étude théorique / note présentée le 4 mars 1897, *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 1896 –1897, pp. 45 – 50.

1897. Sur les faux équilibres chimiques / note présentée le 1 avril 1897, *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 1896 – 1897, pp. 75 – 84.

1897. Théorèmes sur la distillation / note présentée le 17 juin 1897, *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 1896 – 1897, pp. 112 – 115.

1897. Thermochimie: À propos d'un livre récent de M. Marcelin Berthelot, *Revue des Questions Scientifiques*, 21e année, t. XLII (2e série, t. XII), octobre 1897, pp. 361 – 392.

1897. *Thermochimie: À propos d'un livre récent de M. Marcelin Berthelot*. – Paris: Librairie Scientifique A. Hermann, 1897. – 36 p.

1897. *Traité élémentaire de mécanique chimique, fondée sur la thermodynamique*. – Tome 1: *Introduction. Principes fondamentaux de la thermodynamique. Faux équilibres et explosions*, Paris: Librairie Scientifique A. Hermann, 1897. – VIII, 299 p.

1898. L'intégrale des forces vives en thermodynamique, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 5e série, t. IV, 1898, n˚1, pp. 5 – 19.

1898. La loi des phases: À propos d'un livre récent de M. Wilder D. Bancroft, *Revue des Questions Scientifiques*, 22e année, t. XLIV (2e série, t. XIV), juillet 1898, pp. 54 – 82.

1898. On the general problem of chemical statics / traduit par J.E. Trevor, *The Journal of Physical Chemistry*, t. II, janvier 1898, pp. 1 - 42 et février, pp. 91 – 115.

1898. Remarques touchant les lois du résonateur hertzien établies par M. Turpain / note présentée le 20 janvier 1898, *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 1897 – 1898, pp. 64 – 67.

1898. Sur l'équation des forces vives en thermodynamique et les relations de la thermodynamique avec la mécanique classique / note présentée le 23 décembre 1897, *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 1897 –1898, pp. 23 – 27.

1898. Sur l'équation des petits mouvements dans un milieu fluide / note présentée le 26 mai 1898, *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 1897 –1898, pp. 180 – 184.

1898. Sur la formation des hydrates et les points quadruples / note présentée le 25 novembre 1897, *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 1897 – 1898, pp. 2 – 8.

1898. , Sur les aciers au nickel irréversibles, *Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 5^e^ série, t. IV, 1898, pp. 443 –464.

1898. *Sur les déformations permanentes et l'hystérésis*. – IV mémoire: *Études de divers systèmes dépendant d'une seule variable*. Cinquième mémoire: *Études de divers systèmes dépendant de deux variables*. – Bruxelles : Hayez Imprimeur de l'Académie [...], [1898]. – 199 p. – (Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers publiés par *l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique* ; tome LVI).

1898. *Traité élémentaire de mécanique chimique, fondée sur la thermodynamique*. – Tome 2: *Vaporisation et modifications analogues. Continuité entre l'état liquide et l'état gazeux. Dissociation des gaz parfaits*. – Paris : Librairie Scientifique A. Hermann, 1898. – 378 p.

1898. *Traité élémentaire de mécanique chimique, fondée sur la thermodynamique*. – Tome 3: *Les mélanges homogènes. Les dissolutions*. – Paris : Librairie Scientifique A. Hermann, 1898. – 380 p.

1899. , À propos des faux équilibres chimiques / note présentée le 20 juillet 1899, *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 1898 – 1899, pp. 157 – 162.

1899. Die dauernden Aenderungen und die Thermodynamik. – IV : Ueber einige Eigenschaften der Systeme, welche von einer einzigen normalen Variablen abhängen, besonders über die Zerreissung der elastischen Körper / traduit par G. Breddig, *Zeitschrift für physikalische Chemie*, t. XXVIII, 28 avril 1899, n°4, pp. 577 – 618.

1899. Dissociation pressure before H. Sainte-Claire Deville, *The Journal of Physical Chemistry*, t. III, juin 1899, pp. 364 – 378.

1899. Sur l'allongement spontané d'un fil soumis à une tension constante / note présentée le 18 mai 1899, *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 1898 – 1899, pp. 90 – 93.

1899. Sur l'écrouissage / note présentée le 29 juin 1899, in *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 1898 – 1899, pp. 149 – 151.

1899. Sur l'égalité de Clausius, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 5^e^ série, t. V, 1899, n°2, pp. 175 – 190.

1899. Sur l'intégrale des équations des petits mouvements d'un solide isotrope, *Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 5e série, t. III, 1899, pp. 317 – 329.

1899. Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants et, en particulier, d'un navire qui porte un chargement liquide / note présentée par M. P. Appell le 27 novembre, *Compte rendu des Séances Hebdomadaires de l'Académie des Sciences,* t. CXXIX, 1899, 2e semestre, n˚22, pp. 879 – 880.

1899. Sur les isothermes d'un mélange de deux gaz et sur une extension du théorème de Maxwell, *Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux,* 5e série, t. III, 1899, pp. 331 – 342.

1899. Sur un théorème approché concernant les systèmes affectés d'hystérésis / note présentée le 9 mars 1899, in *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux,* 1898 – 1899, pp. 68 – 71.

1899. Sur un théorème d'électrostatique / note présentée le 26 janvier 1899, *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 1898 – 1899, pp. 33 - 37.

1899. *Traité élémentaire de mécanique chimique, fondée sur la thermodynamique*. – Tome 4 : *Les mélanges doubles. Statique chimique générale des systèmes hétérogènes*. – Paris : Librairie Scientifique A. Hermann, 1899. – 381 p.

1899. Une science nouvelle: La chimie physique, *Revue Philomathique de Bordeaux et du Sud-Ouest*, mai et juin 1899, pp. 205 – 219.

1899. Usines et laboratoires, *Revue Philomátique de Bordeaux et du Sud-Ouest*, septembre 1899, pp. 385 – 400.

1899. Zur Frage von den «falschen Gleichgewichten» / traduit par G. Bredig, *Zeitschrift für physikalische Chemie*, t. XXIX, 15 septembre 1899, n˚4, pp. 711 – 714.

1900. Archimède connaissait-il le paradoxe hydrostatique?, Bibliotheca Mathematica, 3 Folge, t. I, 1900, pp. 15 – 19.

1900. Die dauernden Änderungen und die Thermodynamik. – V : Untersuchung der Systeme, welche von zwei Veränderlichen abhängen, von denen die eine keine Hysteresis besitzt / traduit par G. Bredig, *Zeitschrift für physikalische Chemie*, t. XXXIII, 15 juin 1900, n˚6, pp. 641 – 697.

1900. Die dauernden Änderungen und die Thermodynamik. – VI : Das Härten, Anlassen und Schmieden der Metalle / traduit par G. Bredig, *Zeitschrift für physikalische Chemie*, t. XXXIV, 31 juillet 1900, n˚3, pp. 312 – 377.

1900. Die dauernden Änderungen und die Thermodynamik. – VII: Über einige Annäherungsmethoden, nach welchen man ein System untersuchen kann, welches von zwei Variablen mit Hysteresis abhängt / traduit par G. Bredig, *Zeitschrift für physikalische Chemie*, t. XXXIV, 18 septembre 1900, n˚6, pp. 683 – 700.

1900. *L'œuvre de M. J.H. van't Hoff* : *À propos d'un livre récent*. – Paris : Librairie Scientifique A. Hermann, 1900. – 27 p.

1900. La notion de mixte : Essai historique et critique. – Première partie : Chap. 1 : Le mixte selon les atomistes et selon les péripatéticiens ; Chap. 2 : La notion de mixte au XVII siècle ; Chap. 3 : e La notion de mixte, au XVIII siècle, jusqu'à la révolution e chimique : L'école newtonienne ; Chap. 4 : La notion de mixte, au XVIII siècle, jusqu'à la révolution chimique : L'école e empirique, *Revue de Philosophie*, 1er année, 1er décembre 1900, n˚1, pp. 69 – 99.

1900. Les théories électriques de J. Clerk Maxwell : Étude historique et critique. Introduction, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 24e année, 1900, 2e partie, pp. 239 – 253.

1900. , On the emission and absorption of water vapor by colloidal matter, *The Journal of Physical Chemistry*, t. IV, février 1900, pp. 65 – 122.

1900. Sur la déformation des diélectriques polarisés, *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 3e série, t. IX, janvier 1900, pp. 28 – 29.

1900. Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 5e série, t. VI, 1900, n˚2, pp. 215 – 259.

1900. Sur la théorie électromagnétique de Helmholtz et la théorie électromagnétique de la lumière, *Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles*, série II, t. V, 1900, pp. 227 – 236. (Recueil de travaux offerts par les auteurs à H. A. Lorentz, professeur de physique à l'Université de Leiden à l'occasion du 25 anniversaire de son doctorat, le 11 décembre 1900).

1900. Sur le théorème d'Hugoniot et quelques théorèmes analogues / note présentée le 24 décembre, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXI, 1900, 2e semestre, n˚26, pp. 1171 – 1173.

1900. Sur un point du calcul des variations, *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, 2e série, t. II, 1900, pp. 115 – 136.

1900. Théorie et pratique, *Revue Philomathique de Bordeaux et du Sud-Ouest*, juin 1900, pp. 250 – 262.

1901. De la propagation des ondes dans les fluides visqueux / note présentée le 18 février, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXII, 1901, 1er semestre, n˚7, pp. 393 – 396.

1901. De la propagation des discontinuités dans les fluides visqueux / note présentée le 18 mars, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXII, 1901, 1er semestre, n˚11, pp. 658 – 662.

1901. De la propagation des discontinuités dans un fluide visqueux: Extension de la loi d'Hugoniot / note présentée le 22 avril, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXII, 1901, 1er semestre, n°16, pp. 944 – 946.

1901. Des ondes qui peuvent persister en un fluide visqueux / note présentée le 14 octobre, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXIII, 1901, 2e semestre, n°16, pp. 579 – 580.

1901. Die dauernden Änderungen und die Thermodynamik. – VIII: Die Ungleichung von Clausius und die Hysteresis / traduit par G. Bredig, *Zeitschrift für physikalische Chemie*, t. XXXVII, 3 mai 1901, n°1, pp. 91 – 99.

1901. La notion de mixte : Essai historique et critique. – Seconde partie : Chap. 1 : Le corps simple ; Chap. 2 : La loi des proportions définies ; Chap. 3 : La formule chimique brute et les masses équivalentes, *Revue de Philosophie*, 1er année, 1er février 1901, n°2, pp. 167 – 197.

1901. La notion de mixte : Essai historique et critique. – Seconde partie : Chap. 4 : La substitution chimique ; Chap. 5 : Le type chimique ; Chap. 6 : Les types condensés, la valence et la formule développée, *Revue de Philosophie*, 1er année, 1er avril 1901, n°3, pp. 331 – 357.

1901. , La notion de mixte: Essai historique et critique. – Seconde partie : Chap. 7 : Les isomères et la stéréochimie ; Chap. 8 : La théorie atomique : Critique de cette théorie ; Chap. 9 : La mécanique chimique : Premières tentatives, *Revue de Philosophie*, 1er année, 1er juin 1901, n°4, pp. 430 – 467.

1901. La notion de mixte : Essai historique et critique. – Seconde partie : Chap. 7 : Les isomères et la stéréochimie; Chap. 8 : La théorie atomique : Critique de cette théorie ; Chap. 9 : La mécanique chimique : Premières tentatives, *Revue de Philosophie*, 1er année, 1er juin 1901, n°4, pp. 430 – 467.

1901. La notion de mixte: Essai historique et critique. – Seconde partie : Chap. 10 : La mécanique chimique fondée sur la thermodynamique ; Conclusion, *Revue de Philosophie*, 1er année, 1re octobre 1901, n°6, pp. 730-745.

1901. Les théories électriques de James Clerk Maxwell : Étude historique et critique. Introduction, *Revue des Questions Scientifiques*, 25 année, t. XLIX (2 série, t. XIX), janvier 1901, pp. 5 – 21.

1901. Les théories électriques de J. Clerk Maxwell : Étude historique et critique. – Première partie : Les électrostatiques de Maxwell, in *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 25e année, 1901, 2e partie, pp. 1 – 90.

1901. Les théories électriques de J. Clerk Maxwell : Étude historique et critique. – Deuxième partie : L'électrodynamique de Maxwell, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 25e année, 1901, 2e partie, pp. 293 – 413.

1901. On the liquefaction of a mixture of two gases : Composition of the liquid and of the vapor / traduit par Paul Saurel, *The Journal of Physical Chemistry*, t. V, février 1901, pp. 91 – 112.

1901. Recherches sur l'hydrodynamique. – Première partie : Sur les principes fondamentaux de l'hydrodynamique, *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, 2e série, t. III, 1901, pp. 315 – 377.

1901. Recherches sur l'hydrodynamique. – Deuxième partie : Sur la propagation des ondes, *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, 2e série, t. III, 1901, pp. 379 – 431.

1901. Sur la condition supplémentaire en hydrodynamique / note présentée le 21 janvier, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXII, 1901, 1er semestre, n˚3, er pp. 117 – 120.

1901. Sur la fusion et la cristallisation, et sur la théorie de M. Tammann, *Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles*, série II, t. VI, 1901, pp. 93 –102.

1901. Sur la stabilité de l'équilibre relatif d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 5e série, t. VII, 1901, n˚3, pp. 331 – 350.

1901. Sur la stabilité d'un système animé d'un mouvement de rotation / note présentée le 29 avril, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXII, 1901, 1er semestre, n˚17, pp. 1021 –1023.

1901. Sur la stabilité isentropique d'un fluide / note présentée le 4 février, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXII, 1901, 1er semestre, n˚5, pp. 244 – 246.

1901. Sur la viscosité magnétique, *Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 5e série, t. V, 1901, pp. 1 – 29.

1901. Sur les chaleurs spécifiques des fluides dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles / note présentée le 11 février, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXII, 1901, 1er semestre, n˚6, pp. 292 – 295.

1901. Sur les ondes du second ordre par rapport aux vitesses, que peut présenter un fluide visqueux / note présentée le 11 mars, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXII, 1901, 1er semestre, n˚10, pp. 607 – 610.

1901. Sur les ondes longitudinales et transversales dans les fluides parfaits / note présentée le 3 juin, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXII, 1901, 1er semestre, n˚22, pp. 1303 – 1306.

1901. Sur les théorèmes d'Hugoniot, les lemmes de M. Hadamard, et la propagation des ondes dans les fluides visqueux / note présentée le 13 mai, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXII, 1901, 1er semestre, n˚19, pp. 1163 – 1167.

1901.Sur quelques extensions récentes de la statique et de la dynamique, *Revue des Questions Scientifiques*, 25e année, t. L (2e série, t. XX), juillet 1901, pp. 130 – 157.

1901. Über die Verdampfung eines Gemisches zweier flüchtigen Stoffe für den Fall, dass der eine Dampf sich dissociieren kann / traduit par M. E. Brauer, *Zeitschrift für physikalische Chemie*, t. XXXVI, 8 février 1901, n˚2, pp. 227 – 231.

1901. Un point d'histoire des sciences: La tension de dissociation avant H. Sainte-Claire Deville, *Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 5e série, t. V, e 1901, pp. 67 –83.

1902. Actions exercées par des courants alternatifs sur une masse conductrice ou diélectrique, dans *Compte rendu de la 31 session de l'Association française pour l'avancement des sciences*: Congrès de Montauban, 1902. Seconde partie: Notes et mémoires. – Paris: *Secrétariat de l'Association* ; Masson et C , 1902, pp. 280 – 304.

1902. Des conditions nécessaires pour qu'un fluide soit en équilibre stable/note présentée le 29 décembre, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXV, 1902, 2e semestre, n°26, pp. 1290 – 1293.

1902. L'extension du théorème de Lagrange aux liquides visqueux et les conditions aux limites / note présentée le 24 mars, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXIV, 1902, 1er semestre, n°12, pp. 686 – 688.

1902. La viscosité au voisinage de l'état critique / note présentée le 2 juin, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXIV, 1902, 1er semestre, n°22, pp. 1272 – 1274.

1902. *Les théories électriques de J. Clerk Maxwell*: Étude historique et critique. – Paris: Librairie Scientifique A. Hermann, 1902. – 228 p.

1902. Notes sur quelques points des théories électriques et magnétiques, *Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 6e série, t. II, 1902, pp. 45 – 81.

1902. Notice sur la vie et les travaux de Georges Brunel (1856-1900), *Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 6e série, t. II, 1902, pp. I – LXXXIX.

1902. Recherches sur l'hydrodynamique. – Deuxième partie (suite et fin): Sur la propagation des ondes, *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, 2e série, t. IV, 1902, pp. 101 – 169.

1902. Stabilité, pour des perturbations quelconques, d'un système affecté d'un mouvement de rotation uniforme / note présentée le 6 janvier, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXIV, 1902, 1er semestre, n°1, pp. 23 – 34.

1902. Sur certains cas d'adhérence d'un liquide visqueux aux solides qu'il baigne / note présentée le 3 février, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXIV, 1902, 1er semestre, n°5, pp. 265 – 267.

1902. Sur l'analogie entre les rayons X et les oscillations hertziennes / note présentée le 17 novembre, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXV, 1902, 2e semestre, n°20, p. 845.

1902. Sur l'extension du théorème de Lagrange aux liquides visqueux / note présentée le 10 mars, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXIV, 1902, 1er semestre, n°10, pp. 580 – 581.

1902. Sur l'impossibilité de certains régimes permanents au sein des fluides visqueux / note présentée le 24 février, Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, t. CXXXIV, 1902, 1er semestre, n°8, pp. 456 – 458.

1902. Sur la stabilité de l'équilibre et les variables sans inertie / note présentée le 15 décembre, Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, t. CXXXV, 1902, 2e semestre, n°24, pp. 1088 – 1091.

1902. Sur la stabilité de l'équilibre relatif, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 5e série, t. VIII, 1902, n°3, pp. 215 – 227.

1902. Sur la stabilité, pour des perturbations quelconques, d'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 5e série, t. VIII, 1902, n°1, pp. 5 – 18.

1902. Sur les conditions aux limites en hydrodynamique / note présentée le 20 janvier, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXIV, 1902, 1er semestre, n°3, pp. 149 – 151.

1902. Sur les conditions nécessaires pour la stabilité de l'équilibre d'un système visqueux / note présentée le 1er décembre, Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, t. CXXXV, 1902, 2e semestre, n°22, pp. 939 – 941.

1902. Sur les fluides compressibles visqueux / note présentée le 12 mai, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXIV, 1902, 1er semestre, n°19, pp. 1088 – 1090.

1902. Sur les quasi-ondes / note présentée le 10 novembre, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXV, 1902, 2e semestre, n°19, pp. 761 –763.

1902. *Thermodynamique et chimie: Leçons élémentaires à l'usage des chimistes*. – Paris: Librairie Scientifique A. Hermann, 1902, 496 p.

1903. Compte rendu de Ernst Mach : «La mécanique : Étude historique et critique de son développement» (1904), *Bulletin des Sciences Mathématiques*, t. XXXVIII (2e série, t. XXVII), octobre 1903, 1re partie, pp. 261-283.

1903. Compte rendu de «Mathematical Papers of the late George Green», *Bulletin des Sciences Mathématiques*, t. XXXVIII (2e série, t. XXVII), septembre 1903, 1re partie, pp. 237 –256.

1903. Considérations sur la stabilité et, particulièrement, sur la stabilité des corps élastiques / note présentée le 25 juin 1903, *Procès verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 1902 – 1903, pp. 98 – 104.

1903. Des ondes du premier ordre par rapport à la vitesse au sein d'un milieu vitreux, doué de viscosité, et affecté de mouvements finis / note présentée le 6 avril, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXVI, 1903, 1er semestre, n°14, pp. 858 – 860.

1903., Des ondes du second ordre par rapport à la vitesse au sein des milieux vitreux, doués de viscosité, et affectés de mouvements finis / note présentée le 4 mai, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXVI, 1903, 1er semestre, n°18, pp. 1032 – 1034.

1903. Die dauernden Änderungen und die Thermodynamik. – IX : Die Hysteresis und die umkehrbaren Änderungen / traduit par W. Böttger, *Zeitschrift für physikalische Chemie*, t. XLIII, 22 mai 1903, n°6, pp. 695-700.

1903. *Ewolucya mechaniki*. – I: Rozmaite rodzaje wyjaśnie mechanicznych [= L'évolution de la mécanique. I : Les diverse sortes d'explications mécaniques], *Wiadomości Matematyczne*, t. VII, 1903, pp. 113 – 136.

1903. Ewolucya mechaniki. – II : Mechanika analityczna [= L'évolution de la mécanique. II : La mécanique analytique], *Wiadomości Matematyczne*, t. VII, 1903, pp. 137 – 168.

1903. Ewolucya mechaniki. – III : Teorye mechaniczne ciepła i elektryczności [= L'évolution de la mécanique. III : Les théories mécaniques de la chaleur et de l'électricité], *Wiadomości Matematyczne*, t. VII, 1903, pp. 244-288.

1903. L'évolution de la mécanique. – I: Les diverses sortes d'explications mécaniques, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, t. XIV, 30 janvier 1903, n°2, pp. 63 – 73.

1903. L'évolution de la mécanique. – II: La mécanique analytique, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, t. XIV, 15 février 1903, n°3, pp. 119-132.

1903. L'évolution de la mécanique. – III: Les théories mécaniques de la chaleur et de l'électricité, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, t. XIV, 28 février 1903, n°4, pp. 171 – 190.

1903. L'évolution de la mécanique. – IV: Le retour à l'atomisme et au cartésianisme, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, t. XIV, 15 mars 1903, n°5, pp. 247 – 258.

1903. L'évolution de la mécanique. – V: Les fondements de la thermodynamique, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, t. XIV, 30 mars 1903, n°6, pp. 301 – 314.

1903. L'évolution de la mécanique. – VI: La statique générale et la dynamique générale, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, t. XIV, 15 avril 1903, n°7, pp. 352 – 365.

1903. L'évolution de la mécanique. – VII: Les branches aberrantes de la thermodynamique, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, t. XIV, 30 avril 1903, n°8, pp. 416 - 429.

1903. *L'évolution de la mécanique*. Paris: Maison d'Éditions A. Joanin et Cie, 1903. – 348 p.

1903. La propagation des ondes dans les milieux élastiques selon qu'ils conduisent ou ne conduisent pas la chaleur / note présentée le 22 juin, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXVI, 1903, 1er semestre, n°25, pp. 1537 – 1540.

1903. Léonard de Vinci et la composition des forces concourantes, *Bibliotheca Mathematica*, 3e Folge, t. IV, 1903, pp. 338 – 343.

1903. Les origines de la statique. – Chap. 1 : Aristote et Archimède; Chap. 2 : Léonard de Vinci; Chap. 3: Jérôme Cardan; Chap. 4: L'impossibilité du mouvement perpétuel, *Revue des Questions Scientifiques*, 27e année, t. LIV (3e série, t. IV), octobre 1903, pp. 462 – 516.

1903. Les points d'eutexie et de transition pour les mélanges binaires qui peuvent donner des cristaux mixtes. – Première partie : Le mélange liquide peut donner naissance à deux espèces distinctes de solutions solides, *Journal de Chimie Physique*, t. I, 1903, pp. 34 – 56.

1903. Les points d'eutexie et de transition pour les mélanges binaires qui peuvent donner des cristaux mixtes. – Seconde partie: Le mélange liquide peut donner naissance à une solution solide et à un composé défini, *Journal de Chimie Physique*, t. I, 1903, pp. 97 – 120.

1903. Recherches sur l'hydrodynamique. – Troisième partie Sur les quasiondes, *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, 2e série, t. V, 1903, pp. 5 – 24.

1903. Recherches sur l'hydrodynamique. – Quatrième partie: Des conditions aux limites, *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, 2e série, t. V, 1903, pp. 25 - 61 et pp. 197 – 255.

1903. Recherches sur l'hydrodynamique. – Cinquième partie: Le théorème de Lagrange et les conditions aux limites, *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, 2e série, t. V, 1903, pp. 353 – 376.

1903. —, Recherches sur l'hydrodynamique. – Sixième partie: Sur les deux coefficients de viscosité et la viscosité au voisinage de l'état critique, *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, 2e série, t. V, 1903, pp. 377 – 404.

1903. *Recherches sur l'hydrodynamique. – Première série: Principes fondamentaux de l'hydrodynamique. Propagation des discontinuités, des ondes et des quasi-ondes*. – Paris: Gauthier-Villars Imprimeur-Libraire, 1903. – 211 p. (Publication originelle : 1901 pour la première partie; 1901-1902 pour la deuxième et 1903 pour la troisième.)

1903. Remarques sur la mécanique générale et la mécanique électrique, *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 4e série, t. II, septembre 1903, pp. 686 – 689.

1903. Stabilité et viscosité, *Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 6e série, t. III, 1903, pp. 121 – 140.

1903. Sur l'énergie utilisable d'un système dont la surface est maintenue à une température invariable / note présentée le 23 juillet 1903, *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences*

Physiques et Naturelles de Bordeaux, 1902 – 1903, pp. 121 – 128.

1903. Sur la propagation des ondes dans un milieu parfaitement élastique affecté de déformations finies / note présentée le 8 juin, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXVI, 1903, 1er semestre, n°23, pp. 1379 – 1381.

1903. Sur la stabilité et les petits mouvements des corps fluides, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 5e série, t. IX, 1903, n°3, pp. 233 – 328.

1903.Sur la suppression de l'hystérésis magnétique par un champ magnétique oscillant / note présentée le 14 décembre, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXVII, 1903, 2e semestre, n°24, pp. 1022 – 1025.

1903. Sur la viscosité en un milieu vitreux / note présentée le 2 février, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXVI, 1903, 1er semestre, n°5, pp. 281 – 283.

1903. Sur la viscosité et le frottement au contact de deux fluides / note présentée le 19 février 1903, *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 1902 – 1903, pp. 27 – 30.

1903. Sur le mouvement des milieux vitreux, affectés de viscosité, et très peu déformés / note présentée le 9 mars, in *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXVI, 1903, 1er semestre, n°10, pp. 592 – 595.

1903. Sur les conditions nécessaires pour la stabilité initiale d'un milieu vitreux / note présentée le 2 avril 1903, in *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 1902-1903, pp. 52 – 58.

1903. *Sur les déformations permanentes et l'hystérésis. – Sixième mémoire: L'inégalité de Clausius et l'hystérésis. Septième mémoire: Hystérésis et viscosité.* – Bruxelles : Hayez Imprimeur de l'Académie [...], 1903-1904. – 136 p. – (Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers publiés par *l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*; tome LXII). Mémoires présentés le 7 mai 1901.

1903. Sur les équations du mouvement et la relation supplémentaire au sein d'un milieu vitreux / note présentée le 9 février, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences,* t. CXXXVI, 1903, 1er semestre, n°6, pp. 343 – 345.

1903. Sur les ondes au sein d'un milieu vitreux, affecté de viscosité et très peu déformé / note présentée le 23 mars, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences,* t. CXXXVI, 1903, 1er semestre, n°12, pp. 733 – 735.

1903. Sur les ondes-cloisons / note présentée le 27 juillet, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences,* t. CXXXVII, 1903, 2e semestre, n°4, pp. 237 – 240.

1903. Sur quelques formules de cinématique utiles dans la théorie générale de l'élasticité / note présentée le 19 janvier, Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, t. CXXXVI, 1903, 1er semestre, n°3, pp. 139 – 141.

1903. Sur une généralisation du théorème de Reech / note présentée le 7 mai 1903, *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 1902 – 1903,pp. 65 – 73.

1903. *Thermodynamics and chemistry: A non-mathematical treatise for chemists and students of chemistry / authorized translation by George K. Burgess*; foreword by P. Duhem. – New York: John Wiley & Sons; London : Chapman & Hall, 1903. – XXI, 445 p.

1904. D'une condition nécessaire pour la stabilité d'un milieu vitreux illimité / note présentée le 5 avril, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences,* t. CXXXVIII, 1904, 1er semestre, n°14, pp. 844 – 847.

1904. D'une condition nécessaire pour la stabilité initiale d'un milieu élastique quelconque/ note présentée le 29 février, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences,* t. CXXXVIII, 1904, 1er semestre, n°9, pp. 541 – 544.

1904. —,Effet des petites oscillations de la température sur un système affecté d'hystérésis et de viscosité / note présentée le 16 mai, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences,* t. CXXXVIII, 1904, 1er semestre, n°20, pp. 1196 – 1199.

1904. Effet des petites oscillations de l'action extérieure sur les systèmes affectés d'hystérésis et de viscosité / note présentée le 2 mai, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences,* t. CXXXVIII, 1904, 1er semestre, n°18, pp. 1075 – 1076.

1904. Effets des petites oscillations des conditions extérieures sur un système dépendant de deux variables / note présentée le 30 mai, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXVIII, 1904, 1er semestre, n°22, pp. 1313 – 1316.

1904. Ewolucya mechaniki. – IV: Powrót do atomizmu i do kartezyanizmu [= L'évolution de la mécanique. IV : Le retour à l'atomisme et au cartésianisme], in *Wiadomości Matematyczne*, t. VIII, 1904, pp. 1 – 27.

1904. Ewolucya mechaniki. – V : Podstawy termodynamiki [= L'évolution de la mécanique. V : Les fondements de la thermodynamique], in *Wiadomości Matematyczne*, t. VIII, 1904, pp. 191–222.

1904. Ewolucya mechaniki. – VI: Statyka ogólna i dynamika ogólna [= L'évolution de la mécanique. VI : La statique générale et la dynamique générale], in *Wiadomości Matematyczne*, t. VIII, 1904, pp. 222-253.

1904. Ewolucya mechaniki. – VII : Gałęzie rozchodz ce si od termodynamiki [= L'évolution de la mécanique. VII : Les branches aberrantes de la thermodynamique], in *Wiadomości Matematyczne*, t. VIII, 1904, pp. 253 -280.

1904. Ewolucya mechaniki. – Zakończenie [= L'évolution de la mécanique: Conclusion], in *Wiadomości Matematyczne*, t. VIII, 1904, pp. 280 –285.

1904. Influence exercée par de petites variations des actions extérieures sur un système que définissent deux variables affectées d'hystérésis / note présentée le 13 juin, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXVIII, 1904, 1er semestre, n°24, pp. 1471 – 1473.

1904. La théorie physique : Son objet, sa structure. – Introduction. – Première partie: Chap. 1 : Théorie physique et explication métaphysique, *Revue de Philosophie*, 4e année, t. IV, avril 1904, pp. 387 – 402.

1904. La théorie physique: Son objet, sa structure. – Première partie: Chap. 2 : Théorie physique et classification naturelle, *Revue de Philosophie*, 4e année, t. IV, mai 1904, pp. 542 – 556.

1904. La théorie physique: Son objet, sa structure. – Première partie: Chap. 3 : Les théories représentatives et l'histoire de la physique, *Revue de Philosophie*, 4e année, t. IV, juin 1904, pp. 643 – 671.

1904. La théorie physique: Son objet, sa structure. – Première partie: Chap. 4 : Les théories abstraites et les modèles mécaniques, *Revue de Philosophie*, 4e année, t. V, août 1904, pp. 121 – 160.

1904. La théorie physique: Son objet, sa structure. – Première partie : Chap. 4 : Les théories abstraites et les modèles mécaniques (suite), *Revue de Philosophie*, 4e année, t. V, septembre 1904, pp. 241 – 263.

1904. La théorie physique: Son objet, sa structure. – Seconde partie: Chap. 1: Quantité et qualité, *Revue de Philosophie*, 4e année, t. V, 1904, pp. 353 – 369.

1904. La théorie physique: Son objet, sa structure. – Seconde partie:Chap. 2: Les qualités premières; Chap. 3: La déduction mathématique et la théorie physique, *Revue de Philosophie*, 4e année, t. V, octobre 1904, pp. 535 – 562.

1904. La théorie physique: Son objet, sa structure. – Seconde partie: Chap. 4: L'expérience de physique, *Revue de Philosophie*, 4e année, t. V, décembre, pp. 712 – 737.

1904. Les origines de la statique. – Chap. 5: Les sources alexandrines de la statique du moyen âge, *Revue des Questions Scientifiques*, 28e année, t. LV (3e série, t. V), avril 1904, pp. 560 – 596.

1904. Les origines de la statique. – Chap. 6: La statique du moyen âge: Jordanus de Nemore; Chap. 7: La statique du moyen âge: L'école de Jordanus, *Revue des Questions Scientifiques*, 28e année, t. LVI (3e série, t. VI), juillet 1904, pp. 9 – 66.

1904. Les origines de la statique. – Chap. 8: La statique du moyen âge et Léonard de Vinci; Chap. 9: L'école de Jordanus au XVIe siècle: Nicolo Tartaglia; Chap. 10: La réaction contre Jordanus: Guido Ubaldo, Benedetti, *Revue des Questions Scientifiques*, 28e année, t. LVI (3e série, t. VI), octobre 1904, pp. 394 – 473.

1904. Modifications permanentes. – Sur les propriétés des systèmes affectés à la fois d'hystérésis et de viscosité / note présentée le 18 avril, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXVIII, 1904, 1er semestre, n°16, pp. 942 – 945.

1904. Recherches sur l'élasticité. – Première partie: De l'équilibre et du mouvement des milieux vitreux, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, t. XXI, 1904, pp. 99 – 139.

1904. Recherches sur l'élasticité. – Deuxième partie: Les milieux vitreux peu déformés, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, t. XXI, 1904, pp. 375 – 414.

1904. *Recherches sur l'hydrodynamique. – Seconde série: Les conditions aux limites. Le théorème de Lagrange et la viscosité. Les coefficients de viscosité et la viscosité au voisinage de l'état critique*. – Paris : Gauthier-Villars Imprimeur-Libraire, 1904. – 153 p.

1904. Sur la stabilité de l'équilibre en thermodynamique et les recherches de J.W. Gibbs au sujet de ce problème / note présentée le 21 juillet 1904, *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 1903 – 1904, pp. 112 – 121.

1904. Sur la stabilité de l'équilibre au sein d'une enveloppe imperméable à la chaleur / note présentée le 21 juillet 1904, in *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 1903-1904, pp. 121 – 130.

1904. Sur la stabilité électrique d'un milieu homogène et illimité, dans *Festschrift Ludwig Boltzmann gewidmet zum sechzigsten Geburtstage*, 20 Februar 1904, p. 13.

1904. Sur les métaux flués, *Journal de Chimie Physique*, t. II, 1904, pp. 438 – 446.

1904. Über ein Gesetz von Regnault : Bemerkungen zu der Untersuchung des Herrn J. von Zawidzki / traduit par W. Böttger, *Zeitschrift für physikalische Chemie*, t. XLVIII, 27 mai 1904, n°2, pp. 241 – 242.

1904. Un ouvrage perdu cité par Jordanus de Nemore: Le «Philotechnes», *Bibliotheca Mathematica*, 3e Folge, t. V, 1904, pp. 321 – 325.

1905. *Albert de Saxe et Léonard de Vinci*, *Bulletin Italien*, t. V, janvier mars 1905, n°1, pp. 1 – 33 et avril-juin, n°2, pp. 113 –130.

1905. *De l'accélération produite par une force constante: Notes pour servir à l'histoire de la dynamique*, dans *Rapports et comptes rendus du deuxième congrès international de philosophie tenu à Genève du 4 au 8 septembre 1904* / publiés par Ed. Claparède. – Genève : Henry Kündig Éditeur, 1905. – pp. 859 – 915.

1905. De l'hystérésis magnétique produite par un champ oscillant superposé à un champ constant / note présentée le 8 mai, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXL, 1905, 1er semestre, n°19, pp. 1216 – 1219.

1905. De l'hystérésis magnétique produite par un champ oscillant superposé à un champ constant: Comparaison entre la théorie et l'expérience / note présentée le 22 mai, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXL, 1905, 1er semestre, n°21, pp. 1370 – 1373.

1905. *L'évolution de la mécanique*. – Paris : A. Hermann, 1905. – 348 p. Réimpression de l'édition de 1903.

1905. La théorie physique: Son objet et sa structure. – Seconde partie: Chap. 5: La loi physique, *Revue de Philosophie*, 5e année, t. VI, janvier 1905, pp. 25 – 43.

1905. La théorie physique: Son objet et sa structure. – Seconde partie: Chap. 6: La théorie physique et l'expérience, *Revue de Philosophie*, 5e année, t. VI, mars 1905, pp. 267 – 292.

1905. La théorie physique : Son objet et sa structure. – Seconde partie: Chap. 6: La théorie physique et l'expérience (suite), *Revue de Philosophie*, 5e année, t. VI, avril 1905, pp. 377 – 399.

1905. La théorie physique: Son objet et sa structure. – Seconde partie: Chap. 7: Le choix des hypothèses, *Revue de Philosophie*, 5e année, t. VI, mai 1905, pp. 519 – 559.

1905. La théorie physique: Son objet et sa structure. – Seconde partie: Chap. 7: Le choix des hypothèses (suite), *Revue de Philosophie*, 5e année, t. VI, juin 1905, pp. 619 – 641.

1905. Léonard de Vinci et Bernardino Baldi, *Bulletin Italien*, t. V, octobre-décembre 1905, n°4, pp. 314 – 348.

1905. Léonard de Vinci et Villalpand, *Bulletin Italien*, t. V, juillet septembre 1905, n°3, pp. 237 – 268.

1905. Le principe de Pascal: Essai historique, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, t. XVI, 15 juillet 1905, n°13, pp. 599 – 610.

1905. Les origines de la statique. – Chap. 11: Galileo Galilée ; Chap. 12: Simon Stevin, *Revue des Questions Scientifiques*, 29e année, t. LVII (3e série, t. VII), janvier 1905, pp. 96 – 149.

1905. Les origines de la statique. – Chap. 13: La statique française: Roberval; Chap. 14: La statique française : René Descartes, *Revue des Questions Scientifiques*, 29e année, t. LVII (3e série, t. VII), avril 1905, pp. 462 – 524.

1905. *Les origines de la statique: Les sources des théories physiques* / préface de Pierre Duhem. – Tome premier. – Paris: Librairie Scientifique A. Hermann, 1905. – IV, 360 p. Publication originelle : 1903 pour les chapitres 1 à 4, 1904 pour les chapitres 5 à 10 et 1905 pour les chapitres 11 à 14.

1905. Les origines de la statique. – Chap. 15: Les propriétés mécaniques du centre de gravité d'Albert de Saxe à Evangelista Torricelli. Première période : D'Albert de Saxe à la révolution copernicienne, *Revue des Questions Scientifiques*, 29e année, t. LVIII (3e série, t. VIII), juillet 1905, pp. 115 – 201.

1905. Les origines de la statique. – Chap. 15: Les propriétés mécaniques du centre de gravité, d'Albert de Saxe à Evangelista Torricelli. Seconde période: De la révolution copernicienne à Torricelli, *Revue des Questions Scientifiques*, 29e année, t. LVIII (3e série, t. VIII), octobre 1905, pp. 508 – 558.

1905. Paul Tannery, *Revue de Philosophie*, 5e année, t. VI, 1905, pp. 216 – 230.

1905. Physique de croyant, *Annales de Philosophie Chrétienne*, 77e année, t. CLI (4e série, t. I), octobre 1905, n°1, pp. 44 – 67 et novembre 1905, n°2, pp. 133 – 159.

1905. *Physique de croyant*. – Paris : Librairie Bloud, 1905. 52 p.

1905. Recherches sur l'élasticité. – Troisième partie : La stabilité des milieux élastiques, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, t. XXII, 1905, pp. 143 – 217.

1905. Souvenirs de l'École préparatoire (1878-1882), dans *Centenaire du Collège Stanislas* (1804-1905) / préface de H. de Lacombe. – Paris : Imprimerie de J. Dumoulin, 1905. – pp. 101–122.

1905. Sur l'«Algorithmus demonstratus», in *Bibliotheca Mathematica*, 3e Folge, t. VI, 1905, pp. 9 – 15.

1905. Sur l'équilibre de température d'un corps invariable et la stabilité de cet équilibre, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 6e série, t. I, 1905, n°1, pp. 77 – 94.

1905. Sur l'impossibilité des ondes de choc négatives dans les gaz / note présentée le 20 novembre, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXLI, 1905, 2e semestre, n°21, p. 811.

1905. Sur la direction que prend le champ électrique, au sein d'un milieu diélectrique, au voisinage de la surface d'un corps conducteur, dans Compte rendu de la 33e session de l'*Association française pour l'avancement des sciences :* Grenoble, 1904. *[*Seconde partie :] Notes et mémoires. – Paris: Secrétariat de l'Association; Masson et Cie, 1905. – pp. 373 – 383.

1905. Sur les origines du principe des déplacements virtuels / note présentée le 25 septembre, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXLI, 1905, 2e semestre, n°13, pp. 525 – 527.

1906. *Albert de Saxe*, dans *Études sur Léonard de Vinci, ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu. Première série* Paris : Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1906. pp. 319-338.

1906. Bernardino Baldi, Roberval et Descartes, *Bulletin Italien*, t. VI, janvier-mars 1906, n°1, pp. 25 – 53.

1906. *Études sur Léonard de Vinci, ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu. Première série*. – Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1906. – VIII, 355 p. – Publication originelle: 1905 pour les chapitres 1 à 3 et 1906 pour les chapitres 4 à 8.

1906. L'hystérésis magnétique. – Première partie: L'aimantation dans un champ qui varie très lentement, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, t. XVII, 15 janvier 1906, n°1, pp. 8 – 17.

1906. L'hystérésis magnétique. – Deuxième partie: L'aimantation dans un champ qui varie rapidement, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, t. XVII, 30 janvier 1906, n°2, pp. 64 – 73.

1906. —, *La «Scientia de ponderibus» et Léonard de Vinci*, dans *Études sur Léonard de Vinci. Première série*. – Paris : Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1906. – pp. 257 – 316.

1906. —, *La théorie physique : Son objet et sa structure*. – Paris: Chevalier & Rivière Éditeurs, 1906. – 450 p. – (Bibliothèque de philosophie expérimentale ; 2). Publication originelle : 1904 pour l'introduction, pour la première partie, et pour les quatre premiers chapitres de la seconde partie et 1905 pour les chapitres 5 à 7 de la seconde partie.

1906. Léonard de Vinci, Cardan et Bernard Palissy, *Bulletin Italien*, t. VI, octobre-décembre 1906, n°4, pp. 289 – 319.

1906. Le P. Marin Mersenne et la pesanteur de l'air. – Première partie: Le P. Mersenne et le poids spécifique de l'air, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées,* t. XVII, 15 septembre 1906, n°17, pp. 769 – 782.

1906. Le P. Marin Mersenne et la pesanteur de l'air. – Seconde partie: Le P. Mersenne et l'expérience du Puy-de-Dôme, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées,* t. XVII, 30 septembre 1906, n°18, pp. 809 – 817.

1906. Les origines de la statique. – Chap. 16: La doctrine d'Albert de Saxe et les géostaticiens, *Revue des Questions Scientifiques,* 30^{e} année, t. LIX (3^{e} série, t. IX), janvier 1906, pp. 115 – 148.

1906. Les origines de la statique. – Chap. 17 : La coordination des lois de la statique, *Revue des Questions Scientifiques,* 30^{e} année, t. LIX (3^{e} série, t. IX), avril 1906, pp. 383 – 441.

1906. Les origines de la statique. – Chap. 17: La coordination des lois de la statique (suite). Conclusion, *Revue des Questions Scientifiques*, 30^{e} année, t. LX (3^{e} série, t. X), juillet 1906, pp. 65 – 109.

1906. *Les origines de la statique: Les sources des théories physiques*. – Tome second. – Paris: Librairie Scientifique A. Hermann, 1906. – VIII, 364 p. – Publication originelle : 1905 pour le chapitre 15 et 1906 pour les chapitres 16 et 17.

1906. Quelques lemmes relatifs aux quasi-ondes de choc / note présentée le 12 février, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences,* t. CXLII, 1906, 1er semestre, n°7, pp. 377 – 380.

1906. Recherches sur l'élasticité. – Quatrième partie : Propriétés générales des ondes au sein des milieux visqueux et non visqueux, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3^{e} série, t. XXIII, 1906, pp. 169 – 223.

1906. *Recherches sur l'élasticité*. – Paris : Gauthier-Villars Imprimeur-Libraire, 1906. – 218 p. Publication originelle : 1904 pour la première et la deuxième partie, 1905 pour la troisième partie et 1906 pour la quatrième partie.

1906. *Sulla origine della statica, Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, série 5^{a}, vol. XV, 2 dicembre 1906, pp. 697 – 699.

1906. Sur l'histoire du principe employé en statique par Torricelli / note présentée le 26 novembre, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXLIII, 1906, 2^{e} semestre, n°22, pp. 809 – 812.

1906. Sur les deux chaleurs spécifiques d'un milieu élastique faiblement déformé: Extensions diverses de la formule de Reech / note présentée le 27 août, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXLIII, 1906, 2^{e} semestre, n°9, pp. 371 – 374.

1906. Sur les deux chaleurs spécifiques d'un milieu élastique faiblement déformé : Formules fondamentales/note présentée le 13 août, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXLIII, 1906, 2e semestre, n°7, pp. 335 – 339.

1906. Sur les quasi-ondes de choc au sein des fluides mauvais conducteurs de la chaleur / note présentée le 12 mars, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXLII, 1906, 1er semestre, n°11, pp. 612 – 616.

1906. Sur les quasi-ondes de choc au sein d'un fluide bon conducteur de la chaleur / note présentée le 26 mars, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXLII, 1906, 1er semestre, n°13, pp. 750 – 752.

1906. Sur les quasi-ondes de choc et la distribution des températures en ces quasi-ondes / note présentée le 5 février, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXLII, 1906, 1er semestre, n°6, pp. 324 – 327.

1906. Sur quelques découvertes scientifiques de Léonard de Vinci / note présentée le 10 décembre, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXLIII, 1906, 2e semestre, n°24, pp. 946 – 949.

1906. Sur une inégalité importante dans l'étude des quasi-ondes de choc / note présentée le 26 février, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences,* t. CXLII, 1906, 1er semestre, n°9, pp. 491 – 493.

1906. Thémon le fils du Juif et Léonard de Vinci, in *Bulletin Italien*, t. VI, avril-juin 1906, n°2, pp. 97 – 124 et juillet-septembre, n°3, pp. 185 – 218.

1907. Compte rendu de Josiah-Willard Gibbs : «The scientific papers» (1906), *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2e série, t. XXXI, août 1907, 1re partie, pp. 181 – 211.

1907. *Josiah-Willard Gibbs: À propos de la publication de ses «Mémoires scientifiques»*. – Paris : Librairie Scientifique A. Hermann, 1907. – 43 p.

1907. Le mouvement absolu et le mouvement relatif. – Chap. 1: Il appartient à la métaphysique de fixer le sens de ces mots: «la Terre est immobile, la Terre tourne» ; Chap. 2: Le mouvement du Ciel et le repos de la Terre d'après Aristote, *Revue de Philosophie*, 6e année, t. XI, 1907, pp. 221 – 235.

1907. Le mouvement absolu et le mouvement relatif. – Chap. 3 : Les philosophes grecs et l'immobilité du lieu, *Revue de Philosophie,* 6e année, t. XI, 1907, pp. 347 – 362.

1907. Le mouvement absolu et le mouvement relatif. – Chap. 4: Les commentateurs arabes d'Aristote: Averroès ; Chap. 5 : Albert le Grand ; Chap. 6: Saint Thomas d'Aquin; Chap. 7: Gilles de Rome, *Revue de Philosophie*, 6e année, t. XI, 1907, pp. 548 – 573.

1907. Leonardo da Vinci, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, série 5ª, vol. XVI, 6 gennaio 1907, p. 34. 1907. Nicolas de Cues et Léonard de Vinci, *Bulletin Italien*, t. VII, avril juin 1907, n°2, pp. 87-134 ; juillet-septembre, n°3, pp. 181 – 220 et octobre-décembre, n°4, pp. 314 – 329.

1907. Sur la propagation des quasi-ondes de choc / note présentée le 28 janvier, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXLIV, 1907, 1er semestre, n°4, pp. 179 – 181.

1908. Ce que l'on disait des Indes occidentales avant Christophe Colomb, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, t. XIX, 30 mai 1908, n°10, pp. 402 – 406.

1908. Josiah-Willard Gibbs : À propos de la publication de ses «Mémoires scientifiques», *Revue des Questions Scientifiques*, 32e année, t. LXIII (3e série, t. XIII), janvier 1908, pp. 5 – 43.

1908. *Josiah-Willard Gibbs: À propos de la publication de ses «Mémoires scientifiques»*. – Paris : Librairie Scientifique A. Hermann, 1908. – 43 p.

1908. La valeur de la théorie physique: À propos d'un livre récent, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, t. XIX, 15 janvier 1908, n°1, pp. 7 – 19.

1908. À propos de Abel Rey, *La théorie de la physique chez les physiciens contemporains*. – Paris : Félix Alcan, 1907. – VI, 412 p. – (*Bibliothèque de philosophie contemporaine*).

1908. Le mouvement absolu et le mouvement relatif. – Chap. 8: Jean Duns Scot; Chap. 9: L'école scotiste: Jean le Chanoine, *Revue de Philosophie*, 7e année, t. XII, 1908, pp. 134 – 150.

1908. Le mouvement absolu et le mouvement relatif. – Chap. 10: Guillaume d'Occam ; Chap. 11 : Walter Burley, *Revue de Philosophie*, 7e année, t. XII, 1908, pp. 246 – 265.

1908. Le mouvement absolu et le mouvement relatif. – Chap. 12: Jean de Jandun, *Revue de Philosophie*, 7e année, t. XII, 1908, pp. 386 – 400.

1908. Le mouvement absolu et le mouvement relatif. – Chap. 13: Albert de Saxe, *Revue de Philosophie*, 7e année, t. XII, 1908, pp. 486 – 498.

1908. Le mouvement absolu et le mouvement relatif. – Chap. 14: L'école de Paris: Marsile d'Inghen. Pierre d'Ailly. Nicolas de Orbellis. Pierre Tartaret ; Chap. 15: La théorie du lieu dans les universités allemandes : Conrad Summenhard. Grégoire Reisch, Frederic Sunczel, *Revue de Philosophie*, 7e année, t. XII, 1908, pp. 607 – 623.

1908. Le mouvement absolu et le mouvement relatif. – Chap. 16: L'influence parisienne à l'école de Padoue : Paul Nicoletti de Venise, Gaétan de Tiène, *Revue de Philosophie*, 8e année, t. XIII, 1908, pp. 143 – 165.

1908. Le mouvement absolu et le mouvement relatif. – Chap. 17: La philosophie réactionnaire de l'école de Padoue: Les humanistes. Giorgio Valla ; Chap. 18 : La philosophie réactionnaire de l'école de Padoue (suite) : Les Averroïstes. Agostino Nifo, *Revue de Philosophie*, 8^{2} année, t. XIII, 1908, pp. 275 – 287.

1908. Le mouvement absolu et le mouvement relatif. – Chap. 19: Nicolas Copernic et Joachim Rhaeticus, *Revue de Philosophie*, 8^{e} année, t. XIII, 1908, pp. 515 – 519.

1908. Le mouvement absolu et le mouvement relatif. – Chap. 20: Coup d'œil sur les temps modernes, *Revue de Philosophie*, 8^{e} année, t. XIII, 1908, pp. 635 – 665.

1908. Léonard de Vinci et les origines de la géologie, *Bulletin Italien*, t. VIII, juillet-septembre 1908, n°3, pp. 212 – 252 et octobre décembre, n°4, pp. 312 – 346.

1908. Lettre accompagnant le don de «*Σώζει τὰ φαινομενὰ*: Essai sur la notion de théorie physique de Platon à Galilée» à l'Académie des sciences / lettre lue le 28 décembre, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXLVII, 1908, 2^{e} semestre, n° 26, p. 189.

1908. Nicolas de Cues et Léonard de Vinci, *Bulletin Italien*, t. VIII, janvier-mars, 1908, n°1, pp. 18-55 et avril-juin, n°2, pp. 116 – 147.

1908. Sur la découverte de la loi de la chute des graves / note présentée le 4 mai, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXLVI, 1908, 1er semestre, n°18, pp. 908 – 912.

1908. Sur un fragment, inconnu jusqu'ici, de l'«Opus tertium» de Roger Bacon / note présentée le 27 janvier, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXLVI, 1908, 1er semestre, n°4, pp. 156 – 158.

1908. Sur un fragment, inconnu jusqu'ici, de l'«Opus tertium» de Roger Bacon, *Archivium Franciscanum Historicum*, annus I, 1908, pp. 238 – 240.

1908. *Ziel und Struktur der physikalischen Theorien* / Autorisierte Übersetzung von Dr. Friedrich Adler, mit einem Vorworte von Ernst Mach. – Leipzig : J.A. Barth, 1908. – XII, 367 p. Compte rendu : W. Odtwald, *Zeitschrift für physikalische Chemie*, t. LXV, 1909, n°5, p. 634.

1908. ΣΩΖΕΙΝ ΤΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ: Essai sur la notion de théorie physique de Platon à Galilée. – Chap. 1: La science hellénique, *Annales de Philosophie Chrétienne*, 79^{e} année, t. CLVI (4^{e} série, t. V), mai 1908, n°2, pp. 113 – 139.

1908. ΣΩΖΕΙΝ ΤΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ: Essai sur la notion de théorie physique de Platon à Galilée. – Chap. 2 : La philosophie des Arabes et des Juifs ; Chap. 3 : La scolastique chrétienne du moyen âge, Annales de Philosophie Chrétienne, 79^{e} année, t. CLVI (4^{e} série, t. V), juin 1908, n°3, pp. 277 – 302.

1908. ΣΩZEIN TA ΦAINOMENA: Essai sur la notion de théorie physique de Platon à Galilée. – Chap. 4: La Renaissance avant Copernic; Chap. 5: Copernic et Rhaeticus, *Annales de Philosophie Chrétienne*, 79e année, t. CLVI (4e série, t. V), juillet 1908, n°4, pp. 352 – 377.

1908. ΣΩZEIN TA ΦAINOMENA: Essai sur la notion de théorie physique de Platon à Galilée. – Chap. 6 : De la préface d'Osiander à la réforme grégorienne du calendrier, *Annales de Philosophie Chrétienne*, 79e année, t. CLVI (4e série, t. V), août 1908, n°5, pp. 482 – 514.

1908. ΣΩZEIN TA *ΦAINOMENA: Essai sur la notion de théorie physique de Platon à Galilée. – Chap. 7: De la réforme grégorienne du calendrier à la condamnation de Galilée, Annales de Philosophie Chrétienne*, 79e année, t. CLVI (4e série, t. V), septembre 1908, n°6, pp. 561 – 592.

1908. *ΣΩZEIN TA ΦAINOMENA: Essai sur la notion de théorie physique de Platon à Galilée*. – Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1908. – 144 p.

1909. À propos du «*φιλοτέχνησ*» de Jordanus de Nemore, *Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik*, t. I, 1909, pp. 380 – 384.

1909. Du temps où la scolastique latine a connu la physique d'Aristote, *Revue de Philosophie*, 9e année, t. XV, 1909, n°8, pp. 163 - 178.

1909. *Études sur Léonard de Vinci: Ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu. Seconde série* Paris : Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. – IV, 474 p. – Publication originelle : 1907-1908 pour le chapitre 11 ; 1908 pour le chapitre 12 et1909 pour les chapitres 9 et 10.

1909 Jean I Buridan (de Béthune) et Léonard de Vinci, *Bulletin Italien*, t. IX, janvier-mars 1909, n°1, pp. 27-57 ; avril – juin, n°2, pp. 97 – 130 et juillet-septembre, n°3, pp. 227 – 271.

1909. La tradition de Buridan et la science italienne au XVIe siècle, *Bulletin Italien*, t. IX, octobre-décembre 1909, n°4, pp. 338 – 360.

1909. Le mouvement absolu et le mouvement relatif. – Appendice : Guillaume de Conches, Roger Bacon, Richard de Middleton, Antonio d'Andrès, Jean de Bassols, Grégoire de Rimini, *Revue de Philosophie*, 9e année, t. XIV, 1909, pp. 149 – 179.

1909. Le mouvement absolu et le mouvement relatif. – Appendice: Jean Buridan, *Revue de Philosophie*, 9e année, t. XIV, 1909, pp. 306 – 317.

1909. Le mouvement absolu et le mouvement relatif. – Appendice: L'école parisienne au début du XVIe siècle: Johannes Majoris, Jean Dullaert de Gand, Louis Coronel, Jean de Celaya, *Revue de Philosophie*, 9e année, t. XIV, 1909, pp. 436 – 458.

1909. Le mouvement absolu et le mouvement relatif. – Conclusion, *Revue de Philosophie*, 9e année, t. XIV, 1909, pp. 499 – 508.

1909. *Le mouvement absolu et le mouvement relatif*, Montligeon (Orne): Imprimerie-Librairie de Montligeon, 1909. – 284 p. Publication originelle : 1907 pour les chapitres 1 à 7 ; 1908 pour les chapitres 8 à 20 et 1909 pour les appendices et la conclusion.

1909. *Léonard de Vinci et la pluralité des mondes, dans Études sur Léonard de Vinci : Ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu*. Seconde série – Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. – pp. 57 – 96.

1909. *Léonard de Vinci et les deux infinis, dans Études sur Léonard de Vinci : Ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu*. Seconde série. Paris : Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. – pp. 3 – 53.

1909. Lettre accompagnant le don de la seconde série des «Études sur Léonard de Vinci» à l'Académie des sciences / lettre lue le 15 mars, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences,* t. CXLVIII, 1909, 1^{e}r semestre, n°11, pp. 685 – 687.

1909. Lettre accompagnant le don de «Un fragment inédit de l'Opus tertium de Roger Bacon» à l'Académie des sciences / lettre lue le 11 octobre, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CXLIX, 1909, 2^{e} semestre, n°15, pp. 582 – 583.

1909. Sur la découverte de la loi de la chute des graves, dans *Atti del IV congresso internazionale dei matematici* (Roma, 6 – 11 Aprile 1908) / pubblicati per cura del segretario generale G. Castelnuovo . – Vol. III : Comunicazioni delle sezioni IIIa, IIIb e IV. – Rom : Tipografia della Reale Academia dei Lincei, 1909. – pp. 432-435.

1909. Sur la propagation des ondes de choc au sein des fluides, *Zeitschrift für physikalische Chemie*, t. LXIX, 1909, pp. 169 – 186.

1909. Thierry de Chartres et Nicolas de Cues, *Revue des Sciences Philosophiques et Théologique*s, 3^{e} année, 1909, n°3, pp. 525 – 531.

1909. *Un fragment inédit de l'*«Opus tertium» *de Roger Bacon, précédé d'une étude sur ce fragment*. – Ad Claras Aquas (Quaracchi) prope Florentiam: Ex Typographia Collegii S. Bonaventurae, 1909. – 197 p.

1909. Un précurseur français de Copernic : Nicole Oresme (1377), *in Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, t. XX, 15 novembre 1909, n°21, pp. 866 – 73.

1910. Dominique Soto et la scolastique parisienne, *Bulletin Hispanique*, t. XII, juillet septembre 1910, n°3, pp. 275 – 302 et octobre décembre 1910, n°4, pp. 357 – 376.

1910. La physique néoplatonicienne au moyen âge, *Revue des Questions Scientifiques*, 34^{e} année, t. LXVIII (3^{e} série, t. XVIII), juillet 1910, pp. 10-60 et octobre 1910, pp. 385 – 430.

1910. La tradition de Buridan et la science italienne au XVIe siècle, *Bulletin Italien*, t. X, janvier-mars 1910, n°1, pp. 24 – 47 ; avril juin, n°2, pp. 95 – 133 et juillet-septembre, n°3, pp. 202 – 231.

1910. Sur les «Meteorologicorum libri quatuor», faussement attribués à Jean Duns Scot, in *Archivium Franciscanum Historicum*, 3e année, 1910, pp. 626 – 632.

1910. —, *Thermodynamique et chimie : Leçons élémentaires. – Seconde édition entièrement refondue et considérablement augmentée*. – Paris : A. Hermann et Fils, 1910. – XII, 579 p.

1911. Dominique Soto et la scolastique parisienne (suite), in Bulletin Hispanique, t. XIII, avril-juin 1911, n°2, pp. 157 – 194, juillet septembre 1911, n°3, pp. 291 – 305 et octobre-décembre 1911, n°4, pp. 440 – 467.

1911. La tradition de Buridan et la science italienne au XVIe siècle (suite), *Bulletin Italien*, t. XI, janvier-mars 1911, n°1, pp. 1 – 32.

1911. Le temps selon les philosophes hellènes, *Revue de Philosophie*, 11e année, t. XIX, juillet 1911, pp. 5 – 24 et août 1911, pp. 128 – 145.

1911. Lettre accompagnant le don du premier tome du «Traité d'énergétique» à l'Académie des sciences / lettre lue le 27 mars, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CLII, 1911, 1er semestre, n°13, pp. 833 – 834.

1911. Lettre accompagnant le don du second tome du «Traité d'énergétique» à l'Académie des sciences / lettre lue le 25 septembre, Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, t. CLIII, 1911, 2e semestre, n°13, pp. 587 – 588.

1911. Nemore (Jordanus de), dans *The catholic encyclopedia* / edited by Charles G. Herbermann, Edward A. Pace, Condé B. Pallen, Thomas J. Shahan, and John J. Wynne. – Vol. X. – New York : Robert Appleton Company, 1911. – pp. 740 – 741.

1911. Oresme (Nicole), dans *The catholic encyclopedia* / edited by Charles G. Herbermann, Edward A. Pace, Condé B. Pallen, Thomas J. Shahan, and John J. Wynne. – Vol. XI. – New York: Robert Appleton Company, 1911. – pp. 296 – 297.

1911. Physics (History of), dans *The catholic encyclopedia* / edited by Charles G. Herbermann, Edward A. Pace, Condé B. Pallen, Thomas J. Shahan, and John J. Wynne. – Vol. XII. – New York : Robert Appleton Company, 1911. – pp. 47 – 67.

1911. Sur les petites oscillations d'un corps flottant, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 6e série, t. VII, 1911, n°1, pp. 1 – 84.

1911. *Traité d'énergétique ou de thermodynamique générale. – Tome 1: Conservation de l'énergie. Mécanique rationnelle. Statique générale. Déplacement de l'équilibre*. – Paris : Gauthier-Villars Imprimeur-Libraire, 1911. – 528 p.

1911. *Traité d'énergétique ou de thermodynamique générale. – Tome 2 : Dynamique générale. Conductibilité de la chaleur. Stabilité de l'équilibre*. – Paris : Gauthier-Villars Imprimeur-Libraire, 1911. – 504 p.

1911. *Un document relatif à la réforme du calendrier, dans Hommage à Louis Olivier*. – Paris : Imprimerie de la Cour d'Appel, 1911 – pp. 97 – 103.

1912. *Die Wandlungen der Mechanik und die mechanische Naturerklärung*/Autorisierte Uebersetzung von Dr. Philipp Frank, unter Mitwirkung von Dr. Emma Stiasny. – Leipzig: J.A. Barth, 1912. – VIII, 242 p.

1912. Dominique Soto et la scolastique parisienne (suite), *Bulletin Hispanique*, t. XIV, janvier-mars 1912, n°1, pp. 60 – 76 ; avril juin 1912, n°2, pp. 127 – 139 ; juillet-septembre 1912, n°3, pp. 275 – 299 ; octobre-décembre 1912, n°4, pp. 375 – 382.

1912. La dialectique d'Oxford et la scolastique italienne, *Bulletin Italien*, t. XII, janvier-mars 1912, n°1, pp. 6 – 26 ; avril-juin, n°2, pp. 93 – 120; juillet-septembre, n°3, pp. 203 – 223 et octobre-décembre, n°4, pp. 289 – 298.

1912. La nature du raisonnement mathématique, *Revue de Philosophie*, 12^{e} année, t. XXI, 1912, pp. 531 – 543.

1912. La précession des équinoxes selon les astronomes grecs et arabes, *Revue des Questions Scientifiques*, 36^{e} année, t. LXXI (3^{e} série, t. XXI), 20 janvier 1912, pp. 55 – 87; 20 avril 1912, pp. 465 – 510; t. LXXII (3^{e} série, t. XXII), 20 juillet 1912, pp. 45 – 89.

1912. Saxony (Albert of), dans *The catholic encyclopedia* / edited by Charles G. Herbermann, Edward A. Pace, Condé B. Pallen, Thomas J. Shahan, and John J. Wynne.. – Vol. XIII. – New York: Robert Appleton Company, 1912. – pp. 504 – 505.

1912. Saxony (John of), dans *The catholic encyclopedia* / edited by Charles G. Herbermann, Edward A. Pace, Condé B. Pallen, Thomas J. Shahan, and John J. Wynne.– Vol. XIII. – New York: Robert Appleton Company, 1912. – p. 493.

1912. Saxony (Thierry of, Thierry of Freiburg), dans *The catholic encyclopedia* / edited by Charles G. Herbermann, Edward A. Pace, Condé B. Pallen, Thomas J. Shahan, and John J. Wynne. Vol. XIV. – New York: Robert Appleton Company, 1912. – p. 635.

1912. Sur le principe d'optique géométrique énoncé par Fermat, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, t. LXXVII (6^{e} série, t. VIII), 1912, n°1, pp. 1 – 58.

1913. *Études sur Léonard de Vinci. Troisième série: Les précurseurs parisiens de Galilée* / préface de Pierre DUHEM. – Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1913. – XIV, 605 p. Publication originelle : 1909 pour le chapitre 13 ; 1909-1910-1911 pour le chapitre 14 et 1910-1911-1912 pour le chapitre 15.

1913. Examen logique de la théorie physique, *Revue Scientifique*, t. LI, 14 juin 1913, pp. 737 – 740.

1913. François de Meyronnes O.F.M. et la question de la rotation de la Terre, *Archivium Franciscanum Historicum*, annus VI, 1913, n°1, pp. 23 – 25.

1913. La dialectique d'Oxford et la scolastique italienne (suite), *Bulletin Italien*, t. XIII, janvier – mars 1913, n°1, pp. 16 – 36 ; avril-juin, n°2, pp. 128 – 146 et octobre-décembre, n°4, pp. 297 – 318.

1913. *Le système du monde. : Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic. – Tome 1: Première partie: La cosmologie hellénique*. – Paris : Hermann, 1913. – 512 p.

1913. Le temps et le mouvement selon les scolastiques, *Revue de Philosophie*, 13e année, t. XXIII, 1913, pp. 453 – 478.

1913. Lettre accompagnant le don du premier volume du «Système du monde» à l'Académie des sciences / lettre reçue le 22 décembre et lue le 29 décembre, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CLVII, 1913, 2e semestre, n°26, pp. 1494 – 1496.

1913. Lettre accompagnant le don de la troisième série des «Études sur Léonard de Vinci» à l'Académie des sciences / lettre lue le 6 octobre, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CLVII, 1913, 2e semestre, n°14, pp. 535 – 538.

1913. Remarque élémentaire sur le problème des ondes sphériques / note présentée le 9 juin, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CLVI, 1913, 1er semestre, n°23, pp. 1727 – 1730.

1913. Sur deux inégalités fondamentales de la thermodynamique / note présentée le 10 février, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CLVI, 1913, 1er semestre, n°6, pp. 421 – 424.

1913. Sur la croissance adiabatique de l'entropie / note présentée le 27 janvier, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CLVI, 1913, 1er semestre, n°4, pp. 284 – 286.

1913. Sur la formule de la vitesse du son / note présentée le 28 juillet, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CLVII, 1913, 2e semestre, n°4, p. 269.

1913. Sur la stabilité adiabatique de l'équilibre / note présentée le 20 janvier, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CLVI, 1913, 1er semestre, n°3, pp. 181 – 184.

1913. Sur la stabilité de l'équilibre thermique / note présentée le 24 février, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CLVI, 1913, 1er semestre, n°8, pp. 597 – 598.

1913. Sur la vitesse du son / note présentée le 1er septembre, in *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CLVII, 1913, 2^{e} semestre, n°9, pp. 426 – 27.

1913. Sur le diamagnétisme, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 6^{e} série, t. IX, 1913, n°2, pp. 89 – 164.

1914. L'astrologie au moyen âge, *Revue des Questions Scientifiques*, 38^{e} année, t. LXXVI (3^{e} série, t. XXVI), octobre 1914, pp. 349 – 391.

1914. *La théorie physique : Son objet - sa structure*. – Deuxième édition revue et augmentée. – Paris : Marcel Rivière & Cie Éditeurs, 1914. – VIII, 514 p. – (Bibliothèque de philosophie expérimentale ; 2). Se distingue de la première édition par le seul ajout, en annexe, des deux articles suivants : *Physique de croyant*, publié en 1905 et *La valeur de la théorie physique* : À propos d'un livre récent, paru en 1908.

1914. Le problème général de l'électrodynamique pour un système de corps immobiles, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 6^{e} série, t. X, 1914, n°4, pp. 347 – 416.

1914. Le *système du monde: Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic*. – Tome 2 : Première partie : *La cosmologie hellénique* (suite et fin). Deuxième partie : *L'astronomie latine au moyen âge*. – Paris : Hermann, 1914. – 522 p.

1914. Le temps et le mouvement selon les scolastiques (suite), *Revue de Philosophie*, 14^{e} année, t. XXIV, 1^{er} janvier 1914, n°1, p. 5 -15; 1er février 1914, n°2, pp. 136 – 149 ; 1^{er} mars 1914, n°3, pp. 225 – 241; 1^{er} avril 1914, n°4, pp. 361 – 380 ; 1^{er} mai 1914, n°5, pp. 470 – 480 ; 1er août 1914, n°8, pp. 109 – 152.

1914. Les précurseurs parisiens de Galilée, *Revue des Questions Scientifiques*, 38^{e} année, t. LXXV (3^{e} série, t. XXV), avril 1914, pp. 612 – 620. Réédition, après une brève introduction, de la préface de la troisième série des Études sur Léonard de Vinci (1913).

1914. Lettre accompagnant le don du deuxième tome du «Système du monde» à l'Académie des sciences / lettre lue le 15 juin, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CLVIII, 1914, 1^{er} semestre, n°24, pp. 1754 – 1756.

1914. Lettre à l'Académie des sciences à propos de la publication du deuxième tome du «Système du monde», *Journal Officiel de la République Française*, 21 juin 1914, p. 5421.

1914. Remarque sur le paradoxe hydrodynamique de d'Alembert / note présentée le 9 novembre, Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, t. CLIX, 1914, 2^{e} semestre, n°19, pp. 638 – 640.

1914. Sur le paradoxe hydrodynamique de Dalembert [sic] / note reçue le 28 septembre et imprimée le 19 octobre, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CLIX, 1914, 2^{e} semestre, n°16, pp. 592 – 595.

1914. Sur le paradoxe hydrodynamique de M. Brillouin / note présentée le 14 décembre, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CLIX, 1914, 2e semestre, n°24, pp. 790 – 792.

1914. Sur les oscillations électriques, *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, 3e série, t. VI, 1914 [paru en 1916], pp. 177 – 300.

1915. *La science allemande*. – Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1915. – 143 p. Ces quatre conférences ont été données sous les auspices de l'Association Catholique des Étudiants de l'Université de Bordeaux les 25 février, 4, 11 et 18 mars 1915.

1915. *Le système du monde: Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic*. – Tome 3 : Deuxième partie : *L'astronomie latine au moyen âge* (*suite*). – Paris : Hermann, 1915. – 549 p.

1915. Note sur le problème général de l'électrodynamique, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 7e série, t. I, 1915, n°2, pp. 99 – 103.

1915. Quelques réflexions sur la science allemande, *Revue des Deux Mondes*, t. XXV, 1er février 1915, pp. 657 – 686. Republié dans *La science allemande*.

1916. L'optique de Malebranche, *Revue de Métaphysique et de Morale*, t. XXIII, 1916, n°1, pp. 37 – 91.

1916. *La chimie est-elle une science française*?. – Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1916. – 186 p.

1916. Le problème général de l'électrodynamique pour un système de corps conducteurs immobiles / note présentée le 10 avril, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CLXII, 1916, 1er semestre, n°15, pp. 542 – 547.

1916. *Le système du monde: Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic*. – Tome 4 : Deuxième partie : *L'astronomie au moyen âge* (*fin*). Troisième partie : *La crue de l'aristotélisme*. – Paris : Hermann, 1916. – 597 p.

1916. Les oscillations électriques sur un système de corps purement diélectriques / note présentée le 15 mai, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CLXII, 1916, 1er semestre, n°20, pp. 736 – 740.

1916. *Science allemande et vertus allemandes*, dans *Les allemands et la science* / édité par Gabriel PETIT et Maurice LEUDET ; préface de Paul DESCHANEL. – Paris : F. Alcan, 1916. – pp. 137 – 152.

1916. Sur des conditions qui déterminent le mouvement électrique en un système de plusieurs diélectriques / note présentée le 3 avril, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CLXII, 1916, 1er semestre, n°14, pp. 491 – 495.

1916. Sur l'électrodynamique des milieux conducteurs / note présentée le 6 mars, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CLXII, 1916, 1er semestre, n°10, pp. 337 – 342.

1916. Sur l'électrodynamique des milieux diélectriques / note présentée le 21 février, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences,* t. CLXII, 1916, 1er semestre, n°8, pp. 282 – 286.

1916. Sur l'hypothèse de Faraday et de Mossotti, et sur certaines conditions vérifiées au contact de deux diélectriques / note présentée le 20 mars, *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CLXII, 1916, 1er semestre, n°12, pp. 409 – 413.

1916. —, Sur la théorie générale des oscillations électriques / note présentée le 29 mai, in *Comptes rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. CLXII, 1916, 1er semestre, n°22, pp. 815 – 820.

II. INTRODUCCIÓN

Entre la vasta producción científica de Maxwell que abarca temas tan diversos como Mecánica, Óptica, Acústica, Matemáticas, Hidrodinámica, Estadística, Astronomía, Calor y Termodinámica, geometría, etc. hay 6 trabajos dedicados a la electricidad y el magnetismo. Ellos son:

On Faraday's lines of Force, trabajo leído ante la Cambridge Philosophical Society el 10 de diciembre de 1855 y publicado en las *Transactions* de esa sociedad el 11 de febrero de 1856 (Vol. X, Part. I. pp. 155 – 229.

On Physical Lines of Force. Publicado en el *London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* (4th serie, Vol. XXI, March 1861, Part. I pp. 161 – 175, Part II pp. 281 – 291 and 338 – 349, Part III, Vol. XXII, pp. 1 – 24 and pp. 85 –95.

A dynamical theory of the Electromagnetic Field. Recibido en la *Royal Society of London* el 27 de octubre de 1864 y leído el 8 de diciembre del mismo año. Publicado en las *Philosophical Transactions* el 1º de enero de 1865, Vol. 155, pp. 459 – 512.

A Treatise on Electricity and Magnetism, Vol. I y II, Oxford, at the Clarendon Press, 1873.

An Elementary Treatise on Electricity, Oxford, at the Clarendon Press, 1881.

En su libro *Les théories électriques de J. Clerk Maxwell: Étude historique et critique* (1900 - 1901). Duhem analizó en detalle las distintas concepciones sobre el magnetismo que Maxwell desarrolló a lo largo de su carrera así como las distintas explicaciones que el físico escocés propuso sobre la interacción entre la electricidad y el magnetismo.

Duhem adhirió a las concepciones de Hermann von Helmholtz sobre el electromagnetismo, que este investigador publicó primero bajo el título "Ueber elektrische Oscillationen", (Sobre las oscilaciones eléctricas) en las *Verhandlungen des Naturhistorisch-Medizinischen Vereins zu Heidelberg. Bd. V, S,* 27-31. *— Tageblatt der* 43. *Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Innsbruck im September* 1869. *S.* 105-108, luego en "Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Erste Abhandlung: Ueber die Gesetze der inconstanten elektrischen Ströme in körperlich ausgedehnten Leitern,[17], *Verhandlungen des Naturhistorisch-Medizinischen Vereins zu Heidelberg :* 21. *Januar* 1870. *Bd. V, S.* 84 – 89.

[17] Sobre las leyes de las corrientes eléctricas variables en cuerpos conductores extensos. Oliver Heavyside, criticó este trabajo porque permitía la existencia de ondas electromagnéticas longitudinales en el vacío.

Duhem comienza señalando que no hay una teoría electrostática de Maxwell sino varias, según adhirió a las concepciones de Poisson o los signos de las ecuaciones que empleó. En lo que Duhem llama *la primera electrostática de Maxwell* éste, en vez de utilizar el tratamiento tradicional que comienza con los resultados de Coulomb y la teoría de Poisson, para luego desarrollar la teoría de la inducción de Faraday llega ,en forma "novedosa", a establecer la teoría de la polarización de los dieléctricos a partir de la teoría de la conducción del calor, haciendo uso de la analogía física. En la época de Maxwell, ese uso no era novedad. Así las leyes del flujo de calor en régimen estacionario de Fourier, le sirvieron a Ohm, para establecer la del flujo de corriente eléctrica en régimen, estacionario y a Fick para enunciar su ley de difusión.[18]

En lo que Duhem llama la *segunda electrostática* de Maxwell que este autor expresó mediante:

"Una fuerza electromotriz que actúa sobre un dieléctrico, produce un estado de polarización de sus partes similar, como distribución, a la polaridad de las partículas de hierro bajo la influencia de un imán y, como la polarización magnética, esa fuerza electromotriz puede ser representada bajo la forma de un estado en el que cada partícula tiene polos dotados de propiedades opuestas."

"En un dieléctrico sometido a inducción, uno puede concebir, en cada molécula, la electricidad desplazada de tal manera que una de las caras se electrifica positivamente y la otra negativamente, de modo que la electricidad permanece en su totalidad. unido a cada molécula y no puede moverse de una molécula a otra."

"El efecto de esta acción en el conjunto de toda la masa eléctrica es producir un desplazamiento de la electricidad en una determinada dirección ... La magnitud de este desplazamiento depende de la naturaleza del cuerpo y la fuerza electromotriz, por lo que si h es el desplazamiento, R la fuerza electromotriz y E un coeficiente que depende de la naturaleza del dieléctrico,

$$\boldsymbol{R = -\,4\pi E^2 h}$$

... Estas relaciones *son independientes de toda teoría sobre el mecanismo interno de los dieléctricos*..."

Esto es, Maxwell, aceptando las ideas de Coulomb y Poisson sobre magnetización por influencia, adhiere a la concepción de Mossotti sobre la polarización de los dieléctricos y cuantifica los resultados.

La novedad que introduce Maxwell es suponer que cualquier dieléctrico puede considerarse como un ente formado por dos sustancias: un fluido incompresible, sin viscosidad, al que él llamó *éter*, y un sólido perfectamente elástico, al que él llamó *electricidad*.

[18] Algo que no siempre funcionó. Rudolf Clausius dedicó las últimas dos décadas de su vida a tratar de demostrar que los principios de la Termodinámica pueden encuadrarse en las leyes de la Mecánica y no pudo lograrlo.

Duhem puso en evidencia que la fórmula anterior es incorrecta, ya que el signo debe ser positivo. Ese error de signo, lo arrastró Maxwell en buena parte de los razonamientos matemáticos de sus primeros trabajos, pero los corrigió en *A dynamical Theory of the electromagnetic Field.*

En lo que Duhem llama la *tercera electrostática* de Maxwell, pone en evidencia varias incoherencias en lo que Maxwell llamó *desplazamiento eléctrico*, expresión que da a entender que "la electricidad es empujada en la dirección de la fuerza." La llama *tercera electrostática* ya que la conclusión que se obtiene del tratamiento de Maxwell es que *cuando una fuerza electromotriz encuentra una molécula dieléctrica, la polariza; la extremidad de la molécula por la cual entra la fuerza electromotriz está cargada con electricidad positiva; la extremidad de la molécula por la cual se descarga la fuerza electromotriz se carga con electricidad negativa*. Esta conclusión es contraria a lo sostuvieron Coulomb y Poisson en sus estudios sobre el magnetismo, y a lo que consideraron Faraday y Mossotti en el estudio de los dieléctricos.

Daría la sensación que Maxwell no revisaba a fondo sus escritos ya que además de errores gramaticales muchas veces comete el error de colocar un signo menos donde va un signo más o viceversa, lo que desnaturaliza la fórmula, especialmente cuando se trata de una fuerza.

Otras veces usa denominaciones distintas para una misma magnitud o nombra de igual manera a dos magnitudes distintas. Duhem se encargó de puntualizarlo exhaustivamente.

El lector que ha cursado Física a nivel universitario, estará familiarizado con las "ecuaciones de Maxwell" sobre el electromagnetismo. En *A dynamical theory of the Electromagnetic Field* no figura ninguna de esas ecuaciones, sólo figuran unas veinte ecuaciones de las que se podrían deducir las que figuran en los textos modernos.

La notación actual de las "ecuaciones de Maxwell" se debe al trabajo conjunto de Oliver Heavyside y Josiah Williard Gibbs, quienes en 1884, las agruparon y las reformularon con la notación vectorial actual.

III. LES THÉORIES ÉLECTRIQUES DE J. CLERK MAXWELL

Etude historique et critique

Pierre Duhem

CAPÍTULO I.

Las propiedades fundamentales de los dieléctricos. Las doctrinas de Faraday y de Mossotti.

§ 1. *La teoría de la imantación por influencia, precursora de la teoría de los dieléctricos.*

La teoría del magnetismo ha influido a tal punto sobre el desarrollo de nuestros conocimientos tocantes a los cuerpos dieléctricos que, antes que nada, debemos decir algunas palabras acerca de esa teoría.

Æpinus se representaba a los imanes como dos cuerpos sobre los cuales los dos fluidos magnéticos, iguales en cantidad, se separaban de manera de uno iba a un extremo de una barra y el otro fluido iba al otro extremo. Coulomb* modificó esta manera de ver, universalmente admitida en su tiempo.

"Creo", dice, "que el resultado de los experimentos podría conciliarse con el cálculo, haciendo algunos cambios a las hipótesis: he aquí uno que parece capaz de explicar todos los fenómenos magnéticos de los cuales las pruebas anteriores han dado mediciones precisas. Consiste en suponer, en el sistema de M. Æpinus, que el fluido magnético está encerrado en cada molécula o en una parte integral del imán o del acero; que el fluido puede ser transportado de un extremo a otro de esta molécula, lo que le da a cada molécula dos polos; pero que este fluido no puede pasar de una molécula a otra. Así, por ejemplo, si una aguja magnetizada tiene un diámetro muy pequeño, o si cada molécula podría considerarse como una aguja pequeña cuyo extremo norte estaría unido en el extremo sur de la aguja que lo precede, entonces sólo habría dos extremos de esta aguja que darían signos de magnetismo; porque sólo en los dos extremos uno de los polos de la molécula que allí se encuentra no estaría en contacto con el polo opuesto de otra molécula."

Si después de haber sido magnetizada, la aguja se cortara en dos partes, en *a* por ejemplo, el extremo a de la parte *na* de la pieza tendría la misma fuerza que el extremo *n* de toda la aguja, y el

* Coulomb, Septième Mémoire sur l'Électricité et le Magnétisme. — Du Magnétisme (*Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1789, p. 488. — Collection de Mémoires relatifs a la Physique, publiés par la Société française de Physique, 1. 1 : Mémoires de Coulomb).

extremo *a* de la parte *sa* también tendría la misma fuerza que tenía el extremo *n* de toda la aguja antes de ser cortada".

"Este hecho está confirmado muy exactamente por la experiencia, ya que si cortamos en dos partes una aguja muy larga y muy fina, después de haberla magnetizado, cada parte, probada en la escala, se magnetiza hasta la saturación, y aunque se la imante de nuevo, no adquirirá una mayor fuerza directriz."

Poisson había leído este pasaje. "Antes del trabajo de Coulomb sobre el magnetismo", dijo,[**] "se suponía que los dos fluidos se transportaban, en el acto de la magnetización, a los dos extremos de las agujas de la brújula y se acumulaban en sus polos; mientras que para este ilustre físico, los fluidos boreal y austral solo experimentan desplazamientos infinitamente pequeños y no abandonan la molécula del cuerpo magnético al que pertenecen."

La noción de elemento magnético, así introducida en la Física por Coulomb, es la base sobre la cual descansa la teoría, dada por Poisson, de la inducción magnética del hierro dulce; Aquí, de hecho, es cómo Poisson establece ([†]) las hipótesis fundamentales de esta teoría.

"Consideremos un cuerpo de cualquier forma y tamaño que sea, al que, para abreviar llamaremos A, magnetizado por influencia, en el que la fuerza coercitiva es nula."

"De lo que precede, consideraremos a este cuerpo como un conjunto de elementos magnéticos, separados unos de otros por intervalos inaccesibles al magnetismo, y en relación con estos elementos, daremos las diversas suposiciones resultantes de la discusión en la que acabamos de ingresar:"

" 1. Las dimensiones de los elementos magnéticos y de los espacios que los aíslan son insensibles y pueden tratarse como infinitamente pequeñas en relación con las dimensiones del cuerpo A."

" 2. El material de este cuerpo no opone ningún obstáculo a la separación de los dos fluidos *boreal* y *austral* en el interior de los elementos magnéticos."

" 3. Las porciones de los dos fluidos que la magnetización separa en cualquier elemento son siempre muy pequeñas en relación con la totalidad del *fluido neutro* que contiene este elemento, y este fluido neutro nunca se agota."

" 4. Estas porciones de fluido, así separadas, son transportadas a la superficie del elemento magnético donde forman una capa cuyo espesor, variable de un punto a otro, es en todas partes muy pequeño y también se puede considerar infinitamente pequeño, incluso comparándolo con las dimensiones del elemento."

[**] Poisson, Mémoire sur la théorie du Magnétisme, lu à l'Académie des Sciences, le 2 février 1824 (Mémoires de l'Académie des Sciences pour les années 1821 et 1822, t. V, p. 250).

[†] Poisson, *loc. cit.*, p. 262.

La teoría de la magnetización que Poisson basó sobre estas hipótesis está lejos de ser irreprochable; más de un razonamiento esencial carece de rigor o peca contra la exactitud (‡); pero estos defectos, a los que se ha podido remediar más tarde, no deben hacernos olvidar los resultados de capital importancia que el gran teórico ha introducido definitivamente en la ciencia; recordemos algunos de estos resultados, que tendremos que usar más adelante:

Sea *dw* un elemento de volumen recortado de cualquier imán; si, en una línea recta, orientada con el eje magnético de este elemento, llevamos una longitud igual al cociente de su momento magnético por su volumen, obtenemos una cantidad orientada que es la intensidad de magnetización en un punto del elemento *dw*; llamaremos *M* a esta magnitud y *A, B, C,* a sus componentes.

Las componentes *X, Y, Z,* del *campo magnético* en un punto (*x, y, z*) están dadas por las fórmulas

$$X = -\frac{\delta V}{\delta x}, \quad Y = -\frac{\delta V}{\delta y}, \; Z = -\frac{\delta V}{\delta z}$$

V es la *función potencial magnético* del imán y está definida por la igualdad

(1) $$V = \int \left(A_1 \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta x} + B_1 \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta y} + C_1 \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta z} \right) dw$$

(x_1, y_1, z_1) es un punto del elemento dw_1.

A_1, B_1, C_1 son las componentes de la imantación en ese punto, *r* la distancia entre dos puntos (*x, y, z)* y (x_1, y_1, z_1) y la integración se extiende a todo el imán.

(2) $$\rho = -\left(\frac{\delta A}{\delta x} + \frac{\delta B}{\delta y} + \frac{\delta C}{\delta z} \right)$$

y, en cada punto de la superficie del imán, donde N_i es la normal dirigida hacia el interior del imán, hay una densidad superficial

(3) $$\sigma = -\left[A\cos(N_i, x) + B\cos(N_i, x) + C\cos(N_i, z) \right]$$

En cada punto del interior del imán hay

(4) $$\Delta V = -4\pi\rho = 4\pi \left(\frac{\delta A}{\delta x} + \frac{\delta B}{\delta y} + \frac{\delta C}{\delta z} \right)$$

En cada punto de la superficie del imán hay

‡ Étude historique sur l'aimantation par influence (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. II, 1888)

(5) $$\frac{\delta V}{\delta N_i}+\frac{\delta V}{\delta N_e}=-4\pi\sigma=4\pi\left[A\cos(N_i,x)+B\cos(N_i,y)+C\cos(N_i,z)\right]$$

Si un cuerpo perfectamente uniforme está sujeto a la influencia de un imán, se magnetiza alternadamente para que los componentes de la magnetización en cada punto (*x*, *y*, *z*) del imán estén relacionados, por las siguientes igualdades, con la función potencial de la magnetización inductiva e inducida:

(6) $$A=-K\frac{\delta V}{\delta x},\quad B=-K\frac{\delta V}{\delta y},\quad C=-K\frac{\delta V}{\delta z}$$

En estas igualdades, *K* es una cantidad constante para un cuerpo dado, a una temperatura dada, a la que se le da el nombre de *coeficiente de imantación* del cuerpo.

Este punto de partida es suficiente para establecer completamente las ecuaciones del problema de magnetización por influencia en cuerpos desprovistos de fuerza coercitiva.

Como hemos dicho, estos diversos resultados han quedado en la ciencia; sólo las igualdades (6) han sido modificadas. Para explicar los diversos fenómenos presentados por cuerpos fuertemente magnéticos, como el hierro dulce y, en particular, el fenómeno de la saturación, G. Kirchhoff propuso ([*]) reemplazar el coeficiente de magnetización mediante una *función de magnetización*, *f*(*M*), variable no sólo con la naturaleza y la temperatura del cuerpo, sino también con la intensidad *M* de la magnetización. Las igualdades (6) son reemplazadas por las igualdades

(7) $$A=-f(M)\frac{\delta V}{\delta x},\quad B=-f(M)\frac{\delta V}{\delta y},\quad C=-f(M)\frac{\delta V}{\delta z},$$

para los cuerpos débilmente magnetizados, esta función magnetizante se reduce, como lo quería Poisson, a un *coeficiente de imantación.*

Como han señalado Emile Mathieu ([†]) y más tarde M. Poincaré ([††]), es posible disipar las imprecisiones del razonamiento que estropean la teoría de Poisson y evitar las dificultades experimentales que militan en su contra. Sin embargo, las mismas suposiciones en las que se basa esta teoría tienen algo ingenuo que choca los hábitos de los físicos contemporáneos. "En el estado

[*] G. Kirchhoff, "Ueber den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen (*Crelle's Journal fur reine und angewandte Mathematik,* Bd. XLVIII, p. 348, 1853. — G. Kirchhoff's Abhandlungen, p. 103, Berlin, 1882).

[†] É. Mathieu, *Théorie du Potentiel et ses applications à l'Électrostatique et au Magnétisme* ; 2ª parte: *Applications* (Paris, 1886).

[††] H. Poincaré, *Électricité et Optique, I. — Les théories de Maxwell et la théorie électromagnétique de la lumière,* lecciones dictadas en la Sorbonne durante el segundo semestre 1888-1889, p. 44 (Paris, 1890).

actual de la ciencia", dice W. Thomson ([†††]), "una teoría basada en la hipótesis de Poisson de dos fluidos magnéticos móviles dentro de los elementos magnéticos no puede ser satisfactoria. En general, hay que ver la exactitud de tales hipótesis como extremadamente improbable. Por lo tanto, es deseable que la teoría completa de la inducción magnética sobre sustancias cristalinas y no cristalinas se establezca independientemente de cualquier hipótesis sobre fluidos magnéticos y, en la medida de lo posible, sobre una base puramente experimental. Con este fin, he intentado separar la teoría de Poisson de las hipótesis relacionadas con los fluidos magnéticos, y sustituir estas hipótesis por algunos principios elementales que podrían deducirse y que sirven de base para una teoría idéntica, en sus conclusiones esenciales, a la de Poisson."

En lugar de imaginar un imán como un grupo de partículas magnéticas cargadas de las mismas cantidades con fluido boreal y fluido austral, y embebidas en un medio impermeable a los fluidos magnéticos. Sir W. Thomson trató a los imanes como cuerpos continuos cuyas propiedades dependen del valor tomado en cada punto por una cierta cantidad dirigida, la intensidad de la magnetización; los supuestos fundamentales que caracterizan esta magnitud en imanes, en general, y en cuerpos desprovistos de fuerza coercitiva, en particular, son equivalentes a las diversas igualdades que acabamos de escribir. Esta forma de tratar los imanes es ahora generalmente aceptada; hace que los desarrollos de la teoría del magnetismo sean más fáciles y más elegantes, mientras que al mismo tiempo satisface nuestro deseo de hacer que las hipótesis físicas sean independientes de cualquier suposición en cuanto a la existencia o las propiedades de las moléculas.

En el estudio del magnetismo, existe un punto especial que ciertamente influyó en la teoría de los dieléctricos y que, en particular, contribuyó a la adopción de la idea de Faraday de que el éter, vacío de toda materia ponderable, está dotado propiedades dieléctricas. Este punto es el estudio de los *cuerpos diamagnéticos*. Faraday reconoció que en cada punto de una barra de bismuto, la magnetización dirigida no tiene la dirección del campo magnético, sino la dirección opuesta de este campo; el bismuto es diamagnético.

A primera vista, el diamagnetismo parece difícilmente compatible con la teoría del magnetismo imaginada por Poisson; Los corpúsculos magnéticos solo se pueden magnetizar en la dirección del campo. La contradicción se disipa si aceptamos una hipótesis emitida por Edmond Becquerel ([*]).

De acuerdo con esta hipótesis, todos los cuerpos, incluso el bismuto, serían magnéticos; pero el éter, privado de toda otra materia, también sería magnético; bajo estas condiciones, los cuerpos que llamamos magnéticos serían cuerpos más magnéticos que el éter; los cuerpos menos magnéticos que el éter nos parecerían diamagnéticos.

La imposibilidad de cuerpos propiamente diamagnéticos, manifestada en la hipótesis de Poisson, ya no lo es en la misma medida cuando se explican los fundamentos de la teoría del magnetismo,

[†††] W. Thomson, "On the theory of magnetic induction in crystalline and no-crystalline substances", (*Philosophical Magazine*, 4ª serie, vol. I, pp. 177 a 186, 1851. —*Papers on Electrostatics and Magnetism*, art. XXX, sect. 604; Londres, 1872).

[*] Edmond Becquerel, "De l'action du Magnétisme sur tous les corps", (*Comptes Rendus*, t. XXXI, p. 198; 1850. —*Annales de Chimie et de Physique*, 3ª série t. XXVIII, p. 283, 1850).

como ha propuesto W. Thomson; nada, al parecer, nos impide atribuir a la función de magnetización un valor negativo en las ecuaciones (7), que se han convertido en hipótesis puras. Además, en muchos lugares de sus escritos sobre el magnetismo, W. Thomson no ha dificultado el tratamiento adecuado de los cuerpos diamagnéticos.

Las contradicciones que entrañaron nuevamente la existencia de tales cuerpos aparecerían cuando se compararan las leyes del magnetismo con los principios de la termodinámica.

Estas contradicciones fueron observadas por primera vez por W. Thomson, en el testimonio de Tait ([*]): "La opinión comúnmente recibida, según la cual un cuerpo diamagnético, colocado en un campo magnético, toma una polarización opuesta a aquellas que, en las mismas circunstancias, lo hace un cuerpo paramagnético, fue atacada por W. Thomson en nombre de *principio de la energía*. Sabemos que el desarrollo completo del magnetismo en un cuerpo paramagnético requiere un cierto tiempo, y que este magnetismo no desaparece instantáneamente cuando se suprime el campo magnético; es natural suponer que lo mismo ocurre con los cuerpos diamagnéticos; Por lo tanto, es fácil ver que una esfera diamagnética, homogénea e isotrópica, animada por un movimiento de rotación en un campo magnético, y tomando en este campo una distribución magnética opuesta a la que allí tomaría el hierro, estaría sujeta a una cupla que constantemente tendería a darle una rotación en el mismo sentido alrededor de su centro; esta esfera permitiría el movimiento perpetuo."

El Sr. John Parker ([**]), por un razonamiento análogo, ha demostrado que la existencia de cuerpos diamagnéticos sería contradictoria al principio de Carnot.

Finalmente, el Sr. E Beltrami ([***]) y nosotros ([‡]) llegamos a esta conclusión de que si uno puede encontrar, en un cuerpo diamagnético colocado en un campo dado, una distribución magnética que satisfaga las ecuaciones (7), esta distribución corresponde a un estado de equilibrio inestable. Por lo tanto, es imposible admitir la existencia de cuerpos diamagnéticos propiamente dichos e indispensables para recurrir a la hipótesis de Edmond Becquerel: el éter es susceptible de ser imantado.

§2. *La polarización de los dieléctricos*

Si bien las hipótesis de Coulomb y Poisson sobre la constitución de cuerpos magnéticos se desvían extremadamente de los principios preferidos hoy por los físicos, su agudeza, su simplicidad, la facilidad con que la imaginación podría apoderarse de ellos, debían hacer, para los teóricos de

---

[*] Tait, *Sketch of Thermodynamics*.

[**] John Parker, "On diamagnetism and concentration of energy" (*Philosophical Magazine*, 5ª serie, vol. XXVII, p. 403, 1889).

[***] E. Beltrami, Note fisico-matematiche, lettera al prof. Ernesto Cesàro (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. III, sesión del 10 de marzo de 1889).

[‡] Sur l'aimantation par influence (*Comptes rendus*, t. CV, p. 798, 1887) — Sur l'aimantation des corps diamagnétiques (*Comptes rendus*, t. CVI, p. 736, 1888). — Théorie nouvelle de l'aimantation par influence fondée sur la thermodynamique (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II, 1888). — Sur l'impossibilité des corps diamagnétiques (*Comptes rendus*, t. CVIII, p. 1042, 1889).— Des corps diamagnétiques (*Travaux et Mémoires des Facultés de Lille*, mémoire n° 2, 1889). — *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t II, p. 221, 1892.

principios de siglo XIX, una de las hipótesis más seductoras de la Física. Todas las propiedades que ahora representamos por cantidades dirigidas se atribuyeron entonces a moléculas polarizadas, es decir, a moléculas que tienen, en sus dos extremidades, cualidades opuestas y se buscaron comportamientos análogos a la polarización magnética.

La idea de comparar las sustancias aislantes, como el vidrio, el azufre o la goma laca, sometidas a la acción de cuerpos electrificados, con el hierro sujeto a la influencia del imán, sin duda ha ocupado, en la mente de los físicos, una buena parte del tiempo. Ya Coulomb, siguiendo el pasaje que citamos, escribió ([***]):

" La hipótesis que acabamos de hacer parece muy análoga a ese conocido experimento eléctrico: cuando se carga un cristal provisto de dos planos metálicos; Por más delgados que sean los planos, si se retiran del cristal, dan señales muy considerables de electricidad; las superficies del vidrio, después de la descarga de la electricidad de las juntas, permanecen impregnadas con las dos fuentes eléctricas opuestas y forman un muy buen electróforo; este fenómeno depende, en cierta medida, del grosor que tiene la placa de vidrio; así el fluido eléctrico, aunque de naturaleza diferente en los dos lados del vidrio, penetra solo una distancia infinitamente pequeña de su superficie; y este cristal se ve exactamente como una molécula magnetizada en nuestra aguja. Y si ahora ponemos en contacto uno sobre otro una serie de cristales así electrificados de modo que, entre los cristales, el lado positivo que forma la superficie del primero esté a varias pulgadas de la superficie negativa del último; cada superficie de las extremidades, como lo prueba el experimento, producirá, a distancias considerables, efectos tan sensibles como nuestras agujas magnéticas; aunque el fluido de cada superficie de los cristales de las extremidades penetre estas celdas solo a una profundidad infinitamente pequeña, y los fluidos eléctricos de todas las superficies en contacto se equilibren entre sí, ya que una de las caras es positiva y la otra es negativa.

Unos años más tarde, Avogadro ([†]) también admitió que las moléculas de un cuerpo no conductor eléctrico se polarizaron bajo la influencia de un conductor cargado. Para el testimonio de Mossotti ([††]) "El profesor Orioli utilizó la inducción que se ejerce de una molécula a otra, o de una capa delgada del disco de vidrio a otra, para explicar el modo de acción de la máquina eléctrica."

Pero es a Faraday a quien le debemos los primeros desarrollos extensos en la electrificación de los cuerpos aislantes.

Faraday se ocupó de indicar la secuencia de pensamientos que lo llevó a imaginar sus hipótesis sobre la constitución de los *cuerpos dieléctricos*.

[***] Coulomb, Septième Mémoire sur l'Électricité et le Magnétisme (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris pour* 1789, p. 489. — "Collection de Mémoires relatifs a la Physique", publicadas por la *Société française de Physique*; t. I; *Mémoires de Coulomb*).

[†] Avogadro, "Considérations sur l'état dans lequel doit se trouver une couche d'un corps non conducteur de l'électricité lorsqu'elle est interposée entre deux surfaces douées d'électricité de différente espèce" (*Journal de Physique*, t. LXIII, p. 450, 1806). — Second Mémoire sur l'Électricité (*Journal de Physique*, t. LXV, p. 130, 1807).

[††] Mossotti, "Recherches théoriques sur l'induction électrostatique envisagée d'après les idées de Faraday" (*Bibliothèque universelle, Archives*, t. VI, p. 193, 1847).

"Durante la larga serie de investigaciones experimentales en las que me he comprometido", dice, "un resultado general me ha sorprendido constantemente: estamos en la necesidad de admitir dos fuerzas, o dos formas o direcciones de fuerza, y al mismo tiempo, no podemos separar estas dos fuerzas (o estas dos electricidades) entre sí, ya sea mediante los fenómenos de la electricidad estática o por los efectos de las corrientes. Esta imposibilidad que hemos encontrado hasta ahora, en todas las circunstancias, de cargar la materia de una manera absoluta, exclusivamente con una u otra electricidad, siempre ha estado en mi mente. Así he concebido el deseo de aclarar la visión que había adquirido sobre el mecanismo por el cual los poderes eléctricos y las partículas de materia están en relación; en particular, en acciones inductivas, que parecen ser la base de todas las demás; e investigué con ese propósito.

Por analogía, dos teorías han guiado a Faraday en sus suposiciones sobre la polarización de los cuerpos dieléctricos: la teoría del magnetismo y la teoría de las acciones electrolíticas.

Todo el mundo conoce la representación, imaginada por Grotthuss, del estado en el que se encuentra un electrolito atravesado por una corriente; cada molécula está orientada en la dirección de la corriente, el átomo electro-positivo hacia el lado del electrodo negativo y el átomo electro-negativo hacia el lado del electrodo positivo. Faraday fue impactado ([*]) por el parecido que presenta un voltámetro con un condensador. Ponga un placa de hielo entre dos hojas de platino; cargue una de las hojas de electricidad positiva y la otra electricidad negativa; tendrá un condensador de lámina dieléctrica; ahora funda el hielo; el agua será electrolizada y tendrás un voltímetro. ¿De dónde viene esta diferencia? Simplemente el estado líquido del agua que permite que los iones lleguen a los dos electrodos; en cuanto a la polarización eléctrica de las partículas, debe suponerse que preexiste a su movilidad, que ella ya se realiza en hielo. Y dado que todos los fenómenos presentados por el electrolito parecen deberse a una acción de las partículas colocadas en un estado particular de polarización, esto me ha llevado a suponer que la inducción ordinaria misma es, en todos los casos, una acción de partículas contiguas, y que la acción eléctrica a distancia (es decir, la acción inductiva ordinaria) se ejercía solo por medio de la materia interpuesta."

¿Cómo influyen entre sí estas partículas contiguas? Faraday describe repetidamente esta acción. "La inducción aparece ([**]) como consistente en un cierto estado de polarización de las partículas, estado en el que las pone el cuerpo electrificado que ejerce la acción, las partículas presentan puntos o partes positivas, puntos o partes negativas, las partes positivas y las negativas ocupan, en la superficie inducida de las partículas, dos regiones simétricas entre sí,"

"La teoría ([***]) asume que todas las partículas de un cuerpo, tanto de un material aislante como de un material conductor, son conductores perfectos: estas partículas no están polarizadas en su estado normal, pero pueden devenir bajo la influencia de partículas cargadas en su vecindad, el

[*] Faraday, *loc. cit. (Experimental Researches,* T. 1, p. 361).

[**] Faraday, *loc. cit.* (*Experimental Researches,* T. 1, p. 409).

[***] Faraday, "Nature of the electric force or forces", leído en la *Royal Society of London,* el 21de junio de 1838 (*Philosophical Transactions of the Royal Society of London,* 1838, pp. 265 a 282. — *"Experimental Researches",* serie XIV, vol. I,. p. 534).

estado de polarización se desarrolla instantáneamente, al igual que en una masa conductora aislada formada por un gran número de partículas."

"Las partículas de un dieléctrico aislante sometido a inducción se pueden comparar con una serie de pequeñas agujas magnéticas o, más correctamente, con una serie de pequeños conductores aislados. Considere el espacio que rodea un globo electrificado; reemplacémoslo por un dieléctrico aislante, como aire o la esencia de trementina, y esparzámosle pequeños conductores globulares, de modo tal que solo pequeñas distancias los separan entre sí y del globo electrificado; cada uno de ellos estará así aislado, el estado y la acción de estas partículas se parecerán exactamente al estado y la acción de las partículas de un dieléctrico aislado, según yo las concibo. Cuando el globo esté cargado, todos los conductores pequeños estarán polarizados. cuando el globo está descargado, los pequeños conductores volverán a su estado normal, para polarizarse nuevamente si el globo es recargado. "

Está claro que Faraday imagina la constitución de cuerpos dieléctricos con el parecido exacto de lo que Coulomb y Poisson atribuyeron a cuerpos magnéticos; No parece, sin embargo, que Faraday haya pensado en llevar a sus ideas sobre la polarización eléctrica las consecuencias a las que la teoría de la magnetización por influencia había conducido a Poisson.

Esta comparación se indica por primera vez, de manera sucinta pero muy clara, en una de las primeras obras de W. Thomson ([†]). "Debe haber, entonces, una acción muy especial en el interior de los cuerpos dieléctricos sólidos para producir este efecto". Es probable que este fenómeno se explique atribuyendo al cuerpo una acción similar a lo que ocurriría si no hubiera acción dieléctrica en el medio aislante y si hubiera una gran cantidad de pequeñas esferas conductoras distribuidas uniformemente en este cuerpo. Poisson ha demostrado que, en este caso, la acción eléctrica sería bastante similar a la acción magnética del hierro dulce bajo la influencia de cuerpos magnetizados. Sobre la base en los teoremas que ha dado sobre esta acción, es fácil demostrar que si el espacio entre A y B se llena con un medio así constituido, las superficies de equilibrio serán las mismas que cuando solo hay un medio aislante sin energía dieléctrica, pero el potencial en el interior de A será menor que en el último caso, en un informe que es fácil de determinar a partir de los datos relativos al estado del medio aislante. Esta conclusión parece ser suficiente para explicar los hechos que el Sr. Faraday observó con respecto a los medios dieléctricos ... "

Casi al mismo tiempo, la Sociedad Italiana de Ciencias de Módena, formuló un concurso sobre la siguiente tema: "Tomando como punto de partida las ideas de Faraday sobre la inducción electrostática, dé una teoría físico-matemática de la distribución del electricidad en conductores de diversas formas ".

[†] W. Thomson, Note sur les lois élémentaires de l'électricité statique (*Journal de Liouville*, t. X, p. 220, 1S45. — Reproducido con los desarrollos del trabajo, "On the elementary laws of statical electricity, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, nov. 1845, y en *Papers on Electrostatics and Magnetism*, art. II, sect. 25).

Para Mossotti (*), resolver el problema fue suficiente con someter a una especie de transposición las fórmulas que Poisson había obtenido en el estudio del magnetismo; esta transposición fue completada por Clausius (**).

Aceptar las ideas de Faraday, Mossotti y Clausius sobre la constitución de los cuerpos dieléctricos parece tan difícil hoy como admitir las suposiciones de Coulomb y Poisson sobre los cuerpos magnéticos; pero es fácil someter la teoría de la polarización a una modificación análoga a la que W. Thomson ha sometido a la teoría de la magnetización; es a partir de una teoría así liberada de todas las consideraciones sobre las moléculas polarizadas la que utilizó H. von Helmholtz (***).

Vamos a especificar los fundamentos de esta teoría.

Al comienzo del estudio de la electrostática, dos especies de cantidades no dirigidas fueron suficientes para definir la distribución eléctrica en un cuerpo; estas dos cantidades fueron la *densidad eléctrica sólida* σ en cada punto dentro del cuerpo y la *densidad eléctrica superficial* Σ en cada punto de la superficie del cuerpo; aunque los fundadores de la electrostática redujeron esta noción y miraban a la superficie del cuerpo como una capa eléctrica muy delgada, pero no infinitamente delgada.

Más tarde, el estudio de las caídas repentinas de nivel potencial en el contacto de dos conductores diferentes condujo a la introducción de una tercera magnitud no dirigida, irreductible a las anteriores, el *momento de una doble capa* en cada punto de la superficie de contacto de los dos conductores.

Estos tres tipos de magnitudes ya no son suficientes para representar por completo la distribución eléctrica en un sistema cuando este sistema contiene malos conductores; para perfeccionar la representación de dicho sistema, es necesario utilizar una nueva magnitud, una cantidad dirigida, que se asigna a cada punto de un cuerpo dieléctrico, y que se llama *intensidad de polarización* en este punto.

Por lo tanto, un cuerpo dieléctrico es un cuerpo que presenta en cada punto una intensidad de polarización, definida en cantidad y dirección, así como un cuerpo magnético es un cuerpo que presenta en cada punto una intensidad de magnetización, definida en cantidad y en dirección. Las

* Mossotti, "Discussione analitica sull' influenza che l'azzione di un mezzo dielettrico ha sulla distrïbuzione della eleitricità alla superfizie dei piu corpi elettrici disseminati in esso" (*Memorias de la Socidad italiana de Módene*, t. XXIV, p. 49, 1850). — Extractos del mismo (*Bibliothèque universelle, Archives*, t. VI, p. 357, 1847). — Recherches théoriques sur l'induction électrostatique envisagée d'après les idées de Faraday (*Bibliothèque universelle. Archives*, t. VI, p. 193; 1847).

** R. Clausius, Sur le changement d'état intérieur qui a lieu, pendant **la charge, dans la couche isolante d'un carreau de Franklin ou d'une bouteille de Leyde, et sur l'influence de ce changement sur le phénomène de la décharge** ***(Abhandlungen sammlung über die mechanische Théorie der Warme,*** **Bd. II,** ***Zusatz zu Abhandl. X,*** **1867. —** ***Théorie mécanique de la Chaleur, traduite en français par F. Folie,*** **t. II**, ***Addition au Mémoire, X***, 1869).

*** H. Helmholtz, "Ueber die Bewegungsgleichungen der Eléktricitat fur ruhende leitende Körper", § 8 (*Borchardt's Journal fur reine und angewandete Mathematik*, Bd. LXXII, p. 114, 1870. — *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bd. I, p. 611).

hipótesis elementales a las que sometemos a la intensidad de la polarización están, además, copiadas de las hipótesis elementales que caracterizan la intensidad de la magnetización; una sola hipótesis, esencial, es cierto, es específica de la intensidad de polarización; esta hipótesis, a la que estamos necesariamente conducidos por la manera en que Faraday y sus sucesores representaron la constitución de los dieléctricos, es la siguiente:

Un elemento dieléctrico, de volumen dw, cuya intensidad de polarización tiene por componentes A, B, C, ejerce sobre una carga eléctrica COLOCADA a DISTANCIA FINITA, la misma acción que dos cargas eléctricas iguales, una a μ *y la otra a* –μ, *la primera colocada en un punto M del elemento dw, la segunda en un punto M 'del mismo elemento, de tal modo que la dirección M'M es la de la polarización y que tenemos mediante la igualdad*

$$\mu \times \overline{MM'} = \left(A^2 + B^2 + C^2\right)^{1/2} dw$$

Por el contrario, se acepta que *un elemento magnético no actúa sobre una carga eléctrica*.

Antes de resumir las consecuencias que pueden extraerse de estas hipótesis, insistamos, por un momento, en la transformación que han experimentado las suposiciones hechas por los fundadores de la electrostática.

Cuatro especies de magnitudes: la densidad eléctrica sólida, la densidad eléctrica superficial, el momento de una doble capa, la intensidad de la polarización, se utilizan hoy en día para representar la distribución eléctrica de un sistema. Los fundadores de la electrostática, Coulomb, Laplace, Poisson, hicieron uso de solo una de estas magnitudes, la densidad eléctrica sólida; lo admitieron fácilmente en sus teorías, porque podían imaginarlo fácilmente como la densidad de un cierto fluido; a esta magnitud redujeron las otras tres.

En lugar de considerarla como sin espesor, la capa eléctrica que recubre a un cuerpo, y de ella atribuirle una densidad superficial a dicho cuerpo, la imaginaron como una capa de espesor finito, aunque muy pequeño, en el seno de la cual la electricidad tenía una densidad sólida finita, aunque muy grande; dos de tales capas, idénticas en su signo cerca de la electricidad donde se formaron, que están colocadas a una pequeña distancia una de la otra, reemplazan nuestra doble capa actual, sin espesor; finalmente, en lugar de concebir, en cada punto de un dieléctrico, una intensidad de polarización definida en magnitud y dirección, colocaron allí una partícula conductora recubierta por una capa eléctrica conteniendo tanto fluido positivo como fluido negativo.

Hoy en día, ya no pedimos teorías físicas con un mecanismo simple y fácil de imaginar que explique los fenómenos; las consideramos como construcciones racionales y abstractas cuyo propósito es simbolizar un conjunto de leyes experimentales. Por consiguiente, para representar las cualidades que estudiamos, en nuestras teorías admitimos sin dificultad magnitudes de cualquier naturaleza, con la única condición de que estas magnitudes estén claramente definidas; poco importa si la imaginación capta o no las propiedades significadas por estas magnitudes; por ejemplo, las nociones de intensidad de magnetización, de intensidad de polarización, siguen siendo inaccesibles a la imaginación que por el contrario, capturan bien las partículas magnéticas de Poisson, los corpúsculos eléctricos de Faraday, recubiertos, en sus dos extremidades, por capas fluidas de signos opuestos; pero la noción de intensidad de polarización implica un número mucho más pequeño de hipótesis arbitrarias que la noción de partículas polarizadas; está más completamente libre de todas las suposiciones sobre la constitución de la materia; sustituyendo la continuidad por la discontinuidad, ella está lista para cálculos más simples y más rigurosos; por lo que debemos preferirlas.

§ 3. *Proposiciones esenciales de la teoría de los dieléctricos.*

Los principios que hemos analizado permiten desarrollar una teoría completa de la distribución eléctrica en sistemas formados por cuerpos conductores y cuerpos dieléctricos. Indiquemos brevemente, y sin ninguna demostración (*), las proposiciones esenciales que tendremos que usar más adelante.

Imaginemos dos cuerpos pequeños, colocados a una distancia *r* el uno del otro, y que tengan cantidades *q* y *q'* de electricidad; concibamos estos dos pequeños cuerpos colocados no en el éter, es decir, en lo que contendría un recipiente en el que habríamos hecho el vacío físico, sino en un *vacío absoluto*, es decir, en un medio idéntico al espacio de los geómetras, que tiene longitud, ancho y profundidad, pero carente de cualquier propiedad física, en particular de poder imantar o polarizar. La distinción es importante; de hecho, hemos visto que la existencia de cuerpos diamagnéticos sería contradictoria si no atribuyéramos al éter la facultad de imantar unos a otros, de acuerdo con la hipótesis emitida por Edmond Becquerel; y desde Faraday, todos los físicos están de acuerdo en atribuir la polarización dieléctrica al éter.

Por una extensión de las leyes de Coulomb (el experimento verifica estas leyes para los cuerpos colocados en el aire, pero no es concebible para los cuerpos colocados en el vacío absoluto), admitiremos que estos dos pequeños cuerpos se repelen con un fuerza

(8) $$F = \varepsilon \frac{qq'}{r^2}$$

donde ε es una cierta constante positiva.

Supongamos que un conjunto de cuerpos electrificados se coloca en el espacio y sea

(9) $$V = \sum \frac{q}{r}$$

su *función potencial*. En cualquier punto (*x*, *y*, *z*) *fuera* de los conductores electrificados, o *dentro* de uno de ellos, una carga eléctrica μ se somete a una acción cuyos componentes son μ*X*, μ*Y*, μ*Z*, de modo de tener

(10) $$X = -\varepsilon \frac{\delta V}{\delta x}, \quad Y = -\frac{\delta V}{\delta y}, \quad Z = -\varepsilon \frac{\delta V}{\delta z},$$

* El lector podrá encontrar las demostraciones en nuestro "*Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*", t. II, 1892.

Ahora, imaginemos un conjunto de cuerpos dieléctricos polarizados; sea *dw* un elemento dieléctrico; (x_1, y_1, z_1) un punto de este elemento y A_1, B_1, C_1, las componentes de la polarización en ese punto (x_1, y_1, z_1).

$$\overline{V}(x,y,z)=\int\left(A_1\frac{\delta\frac{1}{r}}{\delta x_1}+B_1\frac{\delta\frac{1}{r}}{\delta y_1}+C_1\frac{\delta\frac{1}{r}}{\delta z_1}\right)dw_1 \tag{11}$$

fórmula donde la integración se extiende al conjunto de dieléctricos polarizados y que define, en el punto (x, y, z), a la *función potencial* de este conjunto. En esta fórmula (11), que recuerda exactamente la expresión (1) de la función de potencial magnético, r es la distancia que media entre los dos puntos (x, y, z) y (x_1, y_1, z_1).

El campo electrostático creado por los dieléctricos en el punto (x, y, z), tiene por componentes

$$\overline{X}=-\varepsilon\frac{\delta\overline{V}}{\delta x},\quad \overline{Y}=-\varepsilon\frac{\delta\overline{V}}{\delta y},\quad \overline{Z}=-\varepsilon\frac{\delta\overline{V}}{\delta z} \tag{12}$$

La función potencial $\overline{V}$, definida por la igualdad (11), es idéntica a la función electrostática potencial definida por la fórmula (9) aplicada a una determinada *distribución eléctrica ficticia*; en esta distribución ficticia, cada punto (x, y, z) interior del dieléctrico polarizado es afectado por una densidad sólida

$$\varepsilon=-\left(\frac{\delta A}{\delta x}+\frac{\delta B}{\delta y}+\frac{\delta C}{\delta z}\right) \tag{13}$$

y cada punto de la superficie donde hay contacto entre dos cuerpos diferentes polarizados, designados mediante los índices 1 y 2, corresponde a una densidad superficial

$$E=-\left[A_1\cos(N_1x)+B_1\cos(N_1y)+C_1\cos(N_1z)\right] \tag{14}$$

$$+\left[A_2\cos(N_2x)+B_2\cos(N_2y)+C_2\cos(N_2z)\right]$$

Si alguno de los dos cuerpos, por ejemplo el cuerpo 2, es incapaz de ser polarizado dieléctricamente, es suficiente suprimir A_2, B_2, C_2 de la fórmula precedente.

Vemos que en cualquier punto dentro de un dieléctrico continuo,

$$\Delta\overline{V}=4\pi\varepsilon=4\pi\left(\frac{\delta A}{\delta x}+\frac{\delta B}{\delta y}+\frac{\delta C}{\delta z}\right) \tag{15}$$

mientras que en cualquier punto de la superficie de contacto de dos dieléctricos,

(16)
$$\frac{\delta\overline{V}}{\delta N_1}+\frac{\delta\overline{V}}{\delta N_2}=-4\pi E$$

$$=4\pi\left[A_1\cos(N_1x)+B_1\cos(N_1y)+C_1\cos(N_1z)+A_2\cos(N_2x)+B_2\cos(N_2y)+C_2\cos(N_2z)\right]$$

Consideremos un sistema donde todos los cuerpos susceptibles de ser electrificados son buenos conductores, homogéneos y no descomponibles por electrólisis, y donde todos los cuerpos que pueden estar polarizados son dieléctricos perfectamente polarizables; en un sistema de este tipo, el equilibrio eléctrico estará garantizado por las siguientes condiciones:

1° En cada uno de los cuerpos conductores, tenemos

(17)
$$V+\overline{V}=const.$$

2º En cada punto de un dieléctrico tenemos

(18)
$$\begin{cases} A=\varepsilon F(M)\dfrac{\delta}{\delta x}\left(V+\overline{V}\right), \\ B=\varepsilon F(M)\dfrac{\delta}{\delta y}\left(V+\overline{V}\right), \\ C=\varepsilon F(M)\dfrac{\delta}{\delta z}\left(V+\overline{V}\right), \end{cases}$$

En estas fórmulas

$$M=\left(A^2+B^2+C^2\right)^{1/2}$$

es la intensidad de polarización en el punto (x, y, z) y $F(M)$ es una función esencialmente positiva de M; esta función depende de la naturaleza del dieléctrico en el punto (x, y, z); de un punto a otro, varía de manera continua o discontinua según si la naturaleza y el estado del cuerpo varían de manera continua o discontinua. En general, es suficiente, como primera aproximación, reemplazar $F(M)$ por el *coeficiente de polarización* F, independientemente de la intensidad M de la polarización; por esta aproximación, las igualdades (18) se vuelven

(19)
$$\begin{cases} A=\varepsilon F\,\dfrac{\delta}{\delta x}\left(V+\overline{V}\right), \\ B=\varepsilon F\,\dfrac{\delta}{\delta y}\left(V+\overline{V}\right), \\ C=\varepsilon F\,\dfrac{\delta}{\delta z}\left(V+\overline{V}\right), \end{cases}$$

Inmediatamente siguen dos relaciones que tendrán una gran importancia en este estudio.

Primero, en comparación con la igualdad (13), las igualdades (19) muestran que, en cada punto de un medio continuo dieléctrico,

$$\varepsilon \frac{\delta}{\delta x}\left[F \frac{\delta\left(V+\overline{V}\right)}{\delta x}\right] + \varepsilon \frac{\delta}{\delta y}\left[F \frac{\delta\left(V+\overline{V}\right)}{\delta y}\right] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z}\left[F\delta \frac{\partial\left(V+\overline{V}\right)}{\delta z}\right] = e \tag{20}$$

En segundo lugar, cuando se comparan la ecuación (14), con las ecuaciones (19) se encuentra que en cualquier punto de la superficie de contacto de dos medios diferentes,

$$\varepsilon F_1 \frac{\delta\left(V+\overline{V}\right)}{\delta N_1} + \varepsilon F_2 \frac{\delta\left(V+\overline{V}\right)}{\delta N_2} = E \tag{21}$$

De estas igualdades, saquemos inmediatamente algunas consecuencias importantes.

En el caso en que se aplica a un dieléctrico homogéneo, la fórmula (20) se convierte en

$$\varepsilon F \Delta\left(V+\overline{V}\right) = e$$

Esta ecuación junto con la (15) y con ΔV =0,, d verificada en todo punto donde no hay electricidad real, dan la ecuación

$$(1+4\pi\varepsilon F)\Delta\left(V+\overline{V}\right) = 0$$

y como F es esencialmente positiva, esta ecuación da, a su vez:

$$\Delta\left(V+\overline{V}\right) = 0 \tag{22}$$

y

$$e = 0 \tag{23}$$

De esta proposición demostrada por Poisson en el caso de la imantación por inducción y llevada al caso de los dieléctricos por W. Thomson y O. F. Mossoti.

Cuando un cuerpo dieléctrico, homogéneo y perfectamente liso, está polarizado por inducción, la distribución eléctrica ficticia que sería equivalente a la polarización de este cuerpo es una distribución puramente superficial.

Supongamos ahora que un dieléctrico 1 está en contacto, a través de cierta superficie, con un cuerpo 2, conductor, pero incapaz de cualquier polarización. En cada punto de esta superficie corresponden dos densidades eléctricas superficiales: una densidad *real* Σ y una densidad *ficticia* E; mediante las ecuaciones (16) y (21) podemos llegar a la conocida ecuación

$$\frac{\delta V}{\delta N_1}+\frac{\delta V}{\delta N_2}=-4\pi\Sigma$$

así como a la ecuación

$$\frac{\delta V}{\delta N_2}+\frac{\delta \overline{V}}{\delta N_2}=0$$

que, de acuerdo con la condición (17) nos permite obtener

(24) $$4\pi\varepsilon F_1\Sigma+(1+4\pi\varepsilon F_1)E=0$$

En la superficie de contacto entre un conductor y un dieléctrico, la relación entre la densidad de la capa eléctrica real Σ *y la densidad de la capa eléctrica E es* $-(1+4\pi\varepsilon F)/4\pi\varepsilon F$ *, negativa, mayor que 1 en valor absoluto y que depende únicamente de la naturaleza del dieléctrico.*

Las fórmulas y los teoremas que acabamos de revisar brevemente permiten usar ecuaciones y tratar los problemas que plantea el estudio de los dieléctricos. Dos de estos problemas cumplirán un papel importante en las discusiones que seguirán; por lo tanto, es importante recordar en pocas palabras la solución.

El primero de estos problemas tiene que ver con el condensador.

Imaginemos un condensador cerrado. En cada punto de la armadura interna, la suma ($\boldsymbol{V}$ + $\overline{\boldsymbol{V}}$) tiene el mismo valor U_1, mientras que en cada punto de la armadura externa tiene el valor U_0. El intervalo entre las dos placas está ocupado en su totalidad por un dieléctrico homogéneo *D* del cual *F* es el coeficiente de polarización.

Es fácil demostrar que, en estas condiciones, la armadura interna está cubierta por una carga eléctrica real *Q* dada por la fórmula

$$Q=\frac{1+4\pi\varepsilon F}{4\pi}A(U_1-U_0)$$

A es una cantidad que depende únicamente de la forma geométrica del espacio entre los dos armaduras. La capacidad del condensador, es decir, la relación

$$C=\frac{Q}{\varepsilon(U_1-U_0)}$$

que tiene por valor

(25) $$C=\frac{1+4\pi\varepsilon F}{4\pi\varepsilon}A$$

Tomemos un condensador de forma idéntica al anterior y dejemos entre las armaduras de este condensador un nuevo dieléctrico *D*', que tenga un coeficiente de polarización *F*'; la capacidad de este segundo condensador tendrá valor

$$C' = \frac{1 + 4\pi\varepsilon F'}{4\pi\varepsilon} A$$

Cavendish en 1771, en investigaciones (*) que permanecieron inéditas durante cien años, y Faraday (**) en 1837, determinaron experimentalmente la relación entre la capacidad del segundo condensador y la capacidad del primero; el resultado de esta medida será el número

$$\frac{C'}{C} = \frac{1 + 4\pi\varepsilon F'}{1 + 4\pi\varepsilon F}$$

Este número dependerá únicamente de la naturaleza de los dos dieléctricos *D*' y *D*; a este número, se le da el nombre de *potencia específica del dieléctrico D', relativa al dieléctrico D.*

Por definición, la potencia inductora específica absoluta de un dieléctrico D es el número ($1 + 4\pi\varepsilon F$); para un medio impolarizable es igual a 1.

La consideración del segundo problema se impone de la manera más estricta ya que se considera que el éter es susceptible de polarización dieléctrica.

Toda la electrostática se basa sobre la suposición de que los cuerpos conductores o dieléctricos están aislados en el vacío absoluto; si admitimos la hipótesis de la que acabamos de hablar, tal electrostática es una abstracción pura, incapaz de dar una imagen de la realidad; pero, por una feliz circunstancia, uno puede muy simplemente transformar esta electrostática en otra donde el espacio ilimitado, que estaba vacío en la primera, se llena con un éter homogéneo, incompresible y polarizable.

Sea F_0 el coeficiente de polarización de este medio en el que están inmersos los cuerpos estudiados. Estos cuerpos son conductores homogéneos cargados de electricidad y dieléctricos perfectamente polarizables. ¿Cuál será la distribución eléctrica en un sistema en el equilibrio? ¿Qué fuerzas actuarán entre los diversos cuerpos de los que está compuesto?

La siguiente regla reduce a la electroestática clásica la solución de estas preguntas:

Reemplace el éter polarizable por el vacío; a cada cuerpo conductor, deje la carga eléctrica total que tiene en realidad; a cada dieléctrico, asigne un coeficiente de polarización ficticio φ *igual*

---

* *The electrical Researches of the Honourable Henry Cavendish, F. R. S., written between 1771 and 1781*; edited by J. Clerk Maxwell (Cambridge).

** Faraday, *Experimental Researches in Electricity*, Serie XI, *On induction*; § 5. *On specific induction, on specific inductive capacity*. Leída ante la *Royal Society of London* el 21de diciembre de 1837.

al exceso de su coeficiente de polarización real F respecto del coeficiente de polarización F_0 del éter:

(27) $$\varphi = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{F_0}$$

Finalmente reemplace la constante ε por una constante ficticia

(28) $$\boldsymbol{\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1 + 4\pi\varepsilon F_0}}$$

Obtendrá un sistema ficticio correspondiente al sistema real dado.

La distribución eléctrica sobre los cuerpos conductores será la misma en el sistema ficticio que en el sistema real.

Las acciones ponderomotrices serán las mismas en el sistema ficticio que en el sistema real.

En cuanto a la polarización, en cada uno de los puntos de los cuerpos dieléctricos distintos del éter, tiene la misma dirección en el sistema ficticio que en el sistema real; pero para obtener su magnitud en el segundo sistema, es necesario multiplicar la magnitud que tiene en el segundo por $F/(F - F_0)$

§4. *La idea particular de Faraday*

De las ideas de Faraday sobre la polarización hemos extraído, hasta ahora, lo más general, lo que dio origen a la teoría de los dieléctricos. Estas ideas generales están lejos de representar, en su plenitud, el pensamiento de Faraday. Faraday, además, profesó una opinión muy particular sobre la relación que existe entre la carga eléctrica que cubre un conductor y la polarización del medio dieléctrico en el que se sumerge este conductor. Esta opinión de Faraday no había escapado a Mossotti, que la había adoptado; por otro lado, parece que no ha afectado a ningún físico contemporáneo; Heinrich Hertz ([*]) sostuvo esta opinión, observando que es un caso límite de la teoría de Helmholtz, ya señalado por este gran físico; pero ni Helmholtz ni Hertz lo atribuyeron a Faraday y Mossotti.

Para quien leyó a Faraday con atención minuciosa, está claro que él admitió la siguiente ley:

Cuando un medio dieléctrico se polariza bajo la acción de conductores electrificados, en cada punto de la superficie de contacto entre un conductor y el dieléctrico, la densidad de la capa superficial ficticia que cubre el dieléctrico es igual y de signo opuesto al densidad de la capa eléctrica real que cubre el conductor:

(29) $$\boldsymbol{E + \Sigma = 0}$$

[*] *Heinrich Hertz, Untersuchungen über die Aushreitung der elektrischen Kraft. Einleitende Uebersicht*; Leipzig, 1892. — Traducida al francés por M. Raveau (*La Lumière électrique*, t. XLIV, pp. 285, 335 et 387; 1892).

"Cuando uso la palabra *carga* en su sentido más simple", escribió Faraday al Dr. Hare, "quiero expresar que un cuerpo puede estar cargado con electricidad, siempre que se considere solo al mismo; pero admito que tal carga no puede existir sin inducción, es decir, independientemente del desarrollo de una cantidad igual de la otra electricidad, no en el cuerpo cargado en sí, sino en las partículas inmediatamente adyacente al dieléctrico que lo rodea, y, por medio de estos, sobre las partículas opuestas a los cuerpos conductores no aislados que lo rodean, y que, en esta circunstancia, detiene, por así decirlo, esta inducción particular."

Para Faraday, la posibilidad de mantener una capa eléctrica. en la superficie de un conductor se debe a la existencia, en la vecindad inmediata de esta capa, otra igual en densidad y signo contrario.

Como la teoría supone que el medio que rodea al cuerpo conductor es perfectamente aislante, no es necesario buscar qué fuerza mantiene la capa eléctrica adherida a la superficie del conductor; lo que lo mantiene allí es la propiedad asignada en el medio de no poder permitir el pasaje de la electricidad; si pudiésemos hablar de la *presión* que ejerce el medio sobre la electricidad para mantenerla, es en el sentido de que uno habla en mecánica de *fuerza vinculante*; esta presión es la acción electromotriz que *debería aplicarse* a la capa eléctrica para que permanezca en la superficie del conductor, *si el medio deja de ser aislante*; esta idea parece haber sido percibida muy claramente por Poisson ([*]) quien escribió: "La presión que el fluido ejerce contra el aire que lo contiene, de hecho depende de la fuerza de repulsión y del grosor de la capa; y dado que uno de estos elementos es proporcional al otro, se deduce que la presión varía con la superficie de un cuerpo electrificado y es proporcional al cuadrado del espesor o a la cantidad de electricidad acumulada en cada punto de esta superficie. El aire impermeable a la electricidad debe considerarse como un recipiente cuya forma está determinada por la del cuerpo electrificado; el fluido contenido en este recipiente ejerce diferentes presiones sobre sus paredes en diferentes puntos, de modo que la presión que tiene lugar en ciertos puntos es a veces muy grande e infinita en relación con lo que otros puntos experimentan. En lugares donde la presión del fluido supera la resistencia del aire contra ella, el aire cede, o por decirlo así, es como si el recipiente se rompe y el fluido fluye como por una abertura. Esto es lo que ocurre en los extremos de las puntas y en los bordes afilados de los cuerpos angulosos."

Faraday no entendió la idea de Poisson; confundió la resistencia que el aire opone al escape de la electricidad, en virtud de su no conductibilidad, con la presión atmosférica, es decir, con la resistencia que este mismo aire opone al movimiento de las masas materiales, en virtud de su peso e inercia; y, usando la explicación así interpretada, la aprovechó para su teoría que atribuye a la acción de la capa extendida sobre el dieléctrico el equilibrio de la capa que cubre el conductor:

"En este punto", — escribió Faraday ([†]) —, "creo que mis puntos de vista sobre la inducción tienen una marcada ventaja sobre todos los demás, y especialmente sobre los que atribuyen a la *presión de la atmósfera* la retención de la electricidad sobre la superficie de los conductores

---

* S D. Poisson, Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs, leída ante la *Académie des sciences* el 9 de mayo y el 3 de agosto de 1812 (*Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques pour l'année 1811*, *Mémoires des savants étrangers*, p. 6).

[†] Faraday, *Experimental Researches in Electricity*, Serie XII, *On induction*, vol. I. p. 438.

expuestos al aire; esta visión es la adoptada por Poisson y Biot, y creo que es generalmente aceptada: esta teoría se asocia mediante relaciones mecánicas groseras, por medio de una presión puramente estática, dos elementos tan distintos como el aire ponderable por un lado y, por otro lado, el fluido o fluidos eléctricos, que son fluidos sutiles y, además, hipotéticos ". ... "Esto nos da nueva evidencia ([††]) de que la mera presión de la atmósfera no es suficiente para prevenir o controlar la descarga, sino que este rol corresponde a una cualidad o relación eléctrica del medio gaseoso. Es, por lo tanto, un nuevo argumento para la teoría molecular de la acción inductiva."

Además, un lector atento de *Experimental Research on Electricity* reconoce fácilmente, en la hipótesis que estamos desarrollando en este momento, lo que Faraday pretende afirmar cuando dice que la acción eléctrica no se ejerce a distancia, sino sólo entre partículas contiguas; Ciertamente significa que no se puede desarrollar ninguna cantidad de electricidad en la superficie de una molécula material sin que una carga igual y de signo opuesto de otra molécula extremadamente cercana se desarrolle en el lado opuesto.

Así es como Mossotti entendió el pensamiento de Faraday: "Este físico", — dijo, ([*]) — "considerando el estado de polarización molecular eléctrico, piensa que debe haber dos sistemas de fuerzas opuestas que alternan rápidamente y alternativamente se ocultan en el interior del cuerpo dieléctrico, pero que deben manifestar dos efectos especiales y opuestos a los extremos del mismo cuerpo. Por un lado, por la acción simultánea de los dos sistemas de fuerzas que se desarrollan en el cuerpo dieléctrico, en cada punto de la capa eléctrica que cubre el cuerpo excitado nace una fuerza igual y opuesta a aquella con la que la misma capa tiende a expulsar sus átomos, y la oposición de estas dos fuerzas provoca que el fluido que compone sea retenido en la superficie del cuerpo eléctrico. En el lado opuesto, donde el cuerpo dieléctrico toca o envuelve las superficies de otros cuerpos eléctricos circundantes, despliega una fuerza de una especie análoga a la del cuerpo electrificado y mediante el cual estas superficies son llevadas al estado eléctrico opuesto." Mossotti, después de haber demostrado la existencia de capas superficiales equivalentes a un dieléctrico polarizado por inducción, agregó ([**]): "Estas capas que representarían, en los límites del cuerpo dieléctrico, los efectos no neutralizados de los dos sistemas recíprocos de fuerzas internas, ejercen sobre la superficie de los cuerpos conductores circundantes, acciones equivalentes a las que las capas eléctricas propias de estos mismos cuerpos ejercerían directamente entre ellos sin la intervención del cuerpo dieléctrico. Este teorema nos da la conclusión principal de la cuestión que nos habíamos planteado. El cuerpo dieléctrico, por medio de la polarización de las atmósferas de sus moléculas, sólo transmite de uno a otro cuerpo la acción entre los cuerpos conductores, neutralizando la acción eléctrica sobre uno y llevando a cabo sobre el otro una acción igual a aquella que el primero habría ejercido directamente."

Si observamos que para Faraday y para Mossotti, las palabras *acción eléctrica, fuerza eléctrica,* en todo momento se toman como sinónimos de *carga eléctrica, densidad eléctrica,* no podemos dejar de reconocer, en los pasajes que acabamos de citar, a la hipótesis que traduce la ecuación (29).

[††] *Faraday,* ibidem, *p. 445.*

[*] Mossotti, Recherches théoriques sur l'induction électrostatique envisagée d'après les idées de Faraday (*Bibliothèque universelle, Archives,* t. VI, p. 194; (1847).

[**] Mossotti, *ibid.* p. 196.

Por lo tanto, podemos decir que esta ecuación expresa *la hipótesis particular de Faraday y Mossotti*.

Rigurosamente tomada, esta hipótesis no es compatible con los principios sobre los que se basa la teoría de la polarización dieléctrica; Hemos visto, como consecuencia de la igualdad (24), que la densidad de la capa eléctrica real difundida sobre la superficie de un cuerpo conductor siempre tenía un valor absoluto mayor que la densidad, en el mismo punto, de la capa eléctrica ficticia que sería equivalente a la polarización del dieléctrico contiguo.

Pero esta misma igualdad (24) nos enseña que la hipótesis de Faraday y Mossotti, inaceptable si la llevamos a lo más estricto, puede ser aproximadamente verdadera; esto sucede si εF tiene un valor muy grande en comparación con $1/4\pi$.

Por lo tanto, podemos decir que *la hipótesis de Faraday y Mossotti representará una ley aproximada si el número abstracto εF tiene, para todos dieléctricos, un valor numérico extremadamente grande*.

Examinemos las consecuencias de esta suposición.

La capacidad de un condensador a lámina de aire apenas varía cuando el vacío es lo más perfecto posible. Por lo tanto, se puede suponer que la potencia inductora específica del aire con respecto al éter apenas supera a la unidad o que el número (l + $4\pi\varepsilon F$) relativo al aire puede sustituirse por el número($1 + 4\mathrm{T}\pi\varepsilon F_0$) relativo al éter.

Tomemos dos cargas eléctricas Q y Q' colocadas en el éter (prácticamente en el aire) y sea r la distancia que las separa; estas cargas se repelen entre sí con una fuerza que tiene por valor

(30)
$$\boldsymbol{R} = \frac{\varepsilon}{1 + 4\pi\varepsilon F_0} \frac{QQ'}{r^2}$$

Si admitimos la hipótesis de Faraday y Mossotti, este valor difiere poco de

(31)
$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{4\pi F_0} \frac{QQ'}{r^2}$$

Supongamos que usamos el sistema de unidades electromagnéticas C. G. S .; que los números Q, Q', r, son medidos en este sistema; que las cargas y sus distancias, son números de magnitud moderada; por ejemplo, que los tres son iguales a 1. La experiencia nos muestra que la fuerza repulsiva no puede medirse por un número extremadamente pequeño, sino, por el contrario, se mide por número grande; por lo tanto, no puede considerarse que el coeficiente de polarización F_0 del éter tenga un valor muy grande en el sistema electromagnético C. G. S. Luego, la hipótesis de Faraday conduce a la siguiente proposición:

En el sistema electromagnético C. G. S., *la constante* ε *tiene un valor extremadamente grande*; *cada fórmula puede ser reemplazada por la forma límite que se obtiene cuando* ε *crece más allá de todos los límites*.

La experiencia que acabamos de mencionar nos informa, además, sobre el valor de F_0. La repulsión de dos cargas representadas por el número 1 en el sistema electromagnético C.G.S., colocadas a una distancia de un centímetro una de la otra, se mide sensiblemente por el mismo número que el cuadrado de la velocidad de la luz, es decir, por el número 9×10^{22}; si aceptamos la hipótesis de Faraday, tenemos

$$\frac{1}{4\pi F_0} = 9 \times 10^{22}$$

y

$$F_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^{22}}$$

εF_0 debe ser extremadamente grande en comparación con $1/4\pi$, vemos que e*n el sistema electromagnético* C. G. S., ε *debe ser un número extremadamente grande en comparación con* 10^{22}.

El poder inductor específico relativo al éter (en la práctica, al aire) de un dieléctrico cualquiera está en una relación $(1 + 4\pi\varepsilon F)/(1 + 4\pi\varepsilon F_0)$; para todos los dieléctricos conocidos, tiene un valor finito, varía entre 1 (para el éter) y 64 (para el agua destilada)

O, *en la teoría de Faraday, el poder inductor específico de un dieléctrico D' con respecto a otro dieléctrico D es sensiblemente igual a la relación entre el coeficiente de polarización F' del primer dieléctrico y el coeficiente de polarización F del segundo dieléctrico*:

(32)
$$\frac{1 + 4\pi\varepsilon F'}{1 + 4\pi\varepsilon F} = \frac{F'}{F}$$

Por lo tanto, para todos los dieléctricos, la relación F/F_0 está entre 1 y 64; en otras palabras, para todos los dieléctricos, el coeficiente de polarización F, medido en unidades electromagnéticas C.G.S., es, como máximo, del orden de 10^{-22}.

Helmholtz, después de haber desarrollado una electrodinámica muy general, propuso ([*]), para encontrar varias consecuencias de la teoría de Maxwell, una operación que equivale a tomar la forma límite de las ecuaciones obtenidas cuando εF crece más allá de cualquier límite; esta suposición, como vemos, se reduce inmediatamente a la hipótesis de Faraday y Mossotti.

[*] H. Helmholtz, Ueber die Gesetze der inconstanten elektrischen Ströme in körperlich ausgedehnten Leitern (*Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg,* 21 de junio de 1870; p. 89. — *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bd. I, p. 543).— Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Korper (*Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. LXXII, p. 127 y p. 129. — *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bd. I, p. 625 y p. 628). — Ver también: H. Poincaré. *Électricité et Optique; II. Les théories de Helmholtz et les expériences de Hertz, p. VI y* p. 103; Paris, 1891.

CAPÍTULO II

La primera teoría electrostática de Maxwell

§1. *Recordando la teoría de la conductibilidad del calor.*

Antes de ir más allá y analizar la exposición de las ideas de Maxwell, debemos detenernos un momento para estudiar la conductividad del calor.

Consideremos una materia, homogénea o heterogénea, pero isótropa.

Sea (x, y, z) un punto tomado dentro de esta materia;

T, la temperatura en este punto;

k el coeficiente de conductividad térmica en este punto.

El flujo de calor[‡] en este punto tendrá componentes a lo largo de los ejes de coordenadas:

$$u = -k\frac{\delta T}{\delta x}, \quad v = -k\frac{\delta T}{\delta y}, \quad w = -k\frac{\delta T}{\delta z}, \tag{33}$$

Consideremos una parte continua de un conductor; y en ella un elemento de volumen.

$$dw = dx\ dy\ dz$$

recortado en esta región, contiene una fuente de calor que libera, en el tiempo dt, una cantidad de calor $j\ du\ dt$; que podemos llamar *intensidad de la fuente*. Según esta definición, tendremos

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} = j$$

o bien, en virtud de las ecuaciones (33)

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(k\frac{\delta T}{\delta x}\right) + \frac{\delta}{\delta y}\left(k\frac{\delta T}{\delta y}\right) + \frac{\delta}{\delta z}\left(k\frac{\delta T}{\delta z}\right) + j = 0 \tag{34}$$

[‡] El *flujo* de calor mide la cantidad de calor que, por unidad de tiempo, atraviesa la unidad de superficie, en una dirección ***normal*** a la misma. En el texto original, Duhem utiliza el término *flujo* para variables que se desplazan en dirección *paralela* a una superficie, por lo que hemos traducido el término *flux* por *corriente*. (*N. del T.*)

Sea *S* la superficie que separa dos sustancias, 1 y 2, de conductividades diferentes. El elemento *dS* de esta superficie encierra una fuente de calor superficial que, en el tiempo *dt* emite una cantidad de calor *J dS dt*; *J* es la *intensidad superficial de la fuente*. Entonces tendremos

$$u_1 \cos(N_1 x) + v_1 \cos(N_1 y) + w_1 \cos(N_1 z) + u_2 \cos(N_2 x) + v_2 \cos(N_2 y) + w_2 \cos(N_2 z) = J$$

o bien, en virtud de las ecuaciones (33)

(35) $$k_1 \frac{\delta T}{\delta N_1} + k_2 \frac{\delta T}{\delta N_2} + J = 0$$

Estas son las ecuaciones fundamentales, dadas por Fourier, que rigen la propagación del calor por conductividad. Sabemos cómo el trabajo de G. S. Ohm, completado más tarde por G. Kirchhoff, permitió extenderlos a la propagación de corriente eléctrica dentro de los cuerpos conductores. Para pasar del primer problema al segundo, basta con reemplazar el flujo de calor por el flujo eléctrico, la conductividad térmica por la conductividad eléctrica, la temperatura *T* por el producto εV de la constante de las leyes de Coulomb y la función electrostática potencial; al final de sustituir en *j* y en *J* las relaciones $\delta\sigma/\delta t$, $\delta\Sigma/\delta t$; σ, Σ designan a las densidades eléctricas sólidas y superficiales.

Se puede usar una extensión similar de las ecuaciones de conductividad térmica para tratar la difusión de una sal en una solución acuosa, de acuerdo con el comentario bien conocido de Fick.

También se puede establecer una analogía analítica entre ciertos problemas relacionados con la conductividad del calor y ciertos problemas de electrostática.

Consideremos, por ejemplo, el siguiente problema:

Un cuerpo *C* está inmerso en un espacio *E*. El cuerpo *C* y el espacio *E* son homogéneos, isotrópicos y conductores, pero tienen conductividades diferentes; k_1 es la conductividad del cuerpo *C*; k_2 es la conductividad del espacio *E*. Se supone que el cuerpo *C* debe mantenerse a una temperatura invariable, la misma en todos sus puntos, que designaremos por *A*; los diversos elementos del espacio *E* no tienen otra causa de liberación o absorción de calor que la que proviene de su calor específico γ; cada elemento *dw*, de densidad ρ, libera, en el tiempo *dt*, una cantidad de calor $- \rho\, dw\, \gamma \frac{\delta T}{\delta t}\, dt$, de modo que

$$j = \rho\gamma \frac{\delta T}{\delta t}$$

finalmente, se supone que el estado de este medio *E* es estacionario. Hay, en cada punto, un valor independiente de *t*, que transforma la igualdad anterior en

$$j = 0$$

¿Cómo se deben distribuir las fuentes de calor en la superficie del cuerpo *C* para lograr tal estado? ¿Cuál será, en los diversos puntos del espacio *E*, el valor de la temperatura *T*?

La temperatura *T*, continua en todo el espacio, debe tomar, en cada punto del cuerpo *C* y la superficie que lo termina, el valor constante *A*; en cualquier punto del espacio *E*, ella tendrá que verificar la ecuación

$$\Delta \boldsymbol{T} = \mathbf{0}$$

a la cual se reduce la ecuación (34), cuando

$$\boldsymbol{j} = \mathbf{0}$$

y si suponemos que *k* es independiente de *x, y, z*; *T* queda así determinada, y la ecuación (35), se reducirá a

$$\boldsymbol{k}_2 \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{N}_2} + \boldsymbol{J} = \mathbf{0}$$

permitiendo conocer el valor de *J* en cada punto de la superficie que limita el cuerpo *C*.

Este problema es analíticamente idéntico a este:

Un conductor *C* homogéneo y electrificado está sumergido en un medio aislante E; ¿Cuál es la distribución de electricidad en la superficie de este conductor en equilibrio?

Para pasar del primer problema al segundo, basta con reemplazar, en la solución, la temperatura *T* por la función de potencial eléctrico *V*, el cociente J/k_2 por el producto $4\pi\Sigma$, donde Σ denota la densidad superficial de la capa eléctrica que cubre el conductor *C*.

Puede ser difícil citar al geómetra que primero notó esta analogía; los matemáticos de principios de siglo estaban tan perfectamente acostumbrados al manejo de las ecuaciones diferenciales a las que las diversas teorías de la física conducen que tal analogía debería, por así decirlo, saltar sobre ellas. En cualquier caso, se encuentra explícitamente establecido en obras antiguas por Chasles ([*]) y W. Thomson ([**]).

§ 2. *Teoría de los medios dieléctricos, construida por analogía con la teoría de la conducción de calor.*

---

[*] M. Chasles, "Énoncé de deux théorèmes généraux sur l'attraction des corps et la théorie de la chaleur", (*Comptes rendus*, t. VIII, p. 209 ; 1839).

[**] W. Thomson, "On the uniform Motion of Heat in homogeneous solid Bodies, and its Connexion with the mathematical Theory of Electricity" (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*, febrero de1842. — Reimpreso en el *Philosophical Magazine* de 1854 y en los *Papers on Electrostatics and Magnetism*, Art. 1).

En la búsqueda de las propiedades de los medios dieléctricos, se ha buscado una analogía más profunda con las leyes de la conductividad del calor.

Habiendo solucionado cualquier problema de conductividad, se pasaría al problema análogo de la electrostática conservando las mismas ecuaciones y cambiando el significado de las letras que aparecen en ellas de acuerdo con las siguientes reglas:

Reemplazaríamos la temperatura T por una cierta función Ψ; esta función Ψ determinaría las componentes P, Q, R del *campo electrostático* en el punto (x, y, z) mediante las fórmulas

$$P = -\frac{\delta\Psi}{\delta x}, \quad Q = -\frac{\delta\Psi}{\delta y}, \quad R = -\frac{\delta\Psi}{\delta z} \tag{36}$$

El coeficiente de conductibilidad k será reemplazado por un coeficiente K, que caracterice las propiedades dieléctricas del medio y que llamaremos su *poder inductor específico*.(‡)

Los componentes del flujo de calor u, v, w serán reemplazados por los componentes f, g, h de un vector que llamaremos *polaridad* en el punto (x, y, z) de modo que tendremos

$$\begin{cases} f = KP = -K\dfrac{\partial\Psi}{\delta x} \\ g = KQ = -K\dfrac{\delta\Psi}{\delta y} \\ h = KR = -K\dfrac{\delta\Psi}{\delta z} \end{cases} \tag{37}$$

La intensidad j de la fuente calorífica será reemplazada por $4\pi Ke$, siendo e la *densidad eléctrica sólida*, de modo que la ecuación (34) se transformará en

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(K\frac{\delta\Psi}{\delta x}\right) + \frac{\delta}{\delta y}\left(K\frac{\delta\Psi}{\delta y}\right) + \frac{\delta}{\delta z}\left(K\frac{\delta\Psi}{\delta z}\right) + 4\pi Ke = 0 \tag{38}$$

En las memorias en las que discute la teoría que estamos exponiendo ahora, Maxwell nunca consideró las superficies de discontinuidad que separan los diversos cuerpos entre sí; de hecho, si se quiere, se puede suponer que el paso de los diversos cuerpos de uno a otro se realiza de manera continua a través de una capa muy delgada; los físicos a menudo han utilizado este procedimiento.

Estas diversas reglas, si existieran solas, podrían considerarse como un simple juego de fórmulas que, al igual que las convenciones puramente arbitrarias; pierden este carácter. Para tomar a la electrostática, como una teoría física que puede ser confirmada o contradicha por la experiencia, debemos agregar la siguiente hipótesis:

‡ Es lo que usualmente se conoce como *constante dieléctrica relativa al vacío* (*N. del T.*)

El sistema es el asiento de las acciones que admiten por cantidad potencial

(39) $$U = \frac{1}{2}\int \Psi e dw$$

donde la integración se extiende a todo el sistema.

Algunos lineamientos de esta nueva electrostática se encuentran en las investigaciones de Faraday; es cierto, no sobre el tema de los cuerpos dieléctricos, sino sobre el tema de los cuerpos magnéticos que él traza; pero conocemos los vínculos íntimos que unen el desarrollo de la teoría de los imanes con el desarrollo de la teoría de los cuerpos dieléctricos. Varios fenómenos, dice Faraday ([*]), "me llevaron a la idea de que los cuerpos poseen en diferentes grados un *poder conductor* del magnetismo" ... "Yo uso palabras *poder conductor* como expresión general para designar la capacidad que poseen los cuerpos para transmitir fuerzas magnéticas, sin asumir la forma en que se produce esta transmisión." Algunos cuerpos tendrían un mayor poder de conductor que el entorno circundante; serían los cuerpos magnéticos propiamente dichos; otros conducirían no tan bien como el medio; serían los cuerpos diamagnéticos. Faraday parece haber entrevisto ([**]) que esta teoría no concuerda en todos los aspectos con la teoría clásica de la polarización de los imanes.

Ya unos años antes, las propias ideas de Faraday sobre la inducción eléctrica le habían sugerido a W. Thomson ([***]) algunas ideas análogas: "Es posible, no dudo", escribió, "descubrir que tales fuerzas distantes pueden ser producidas enteramente por la acción de las partes contiguas de todo el medio interpuesto, y encontramos una analogía en el caso del calor, algunos de cuyos efectos, que siguen las mismas leyes, probablemente se propagan desde partícula a partícula.

Pero si algunos vestigios de la idea que acabamos de exponer pueden sospecharse en los escritos de ciertos autores, no cabe duda de que Maxwell la desarrolló primero en una verdadera teoría; a esta teoría, dedicó la primera parte de sus memorias más antiguas sobre electricidad ([*]).

Maxwell comienza proclamando el papel fructífero de la analogía física. "Por analogía física", dice, "me refiero a este parecido parcial entre las leyes de una ciencia y las leyes de otra ciencia que hace que una de las dos ciencias sea posible para ilustrar a la otra", y muestra cómo la analogía física entre la acústica y la óptica ha contribuido al progreso de esta última ciencia.

[*] Faraday, *Experimental Researches in Electricity*, Serie XXVI, leída en la Royal Society of London el 28 de noviembre de 1850 (*Experimental Researches*, Vol. Ill, p. 100).

[**] Faraday, *loc. cit*., p. 208.

[***] W. Thomson, "On the elementary Laws of Statical Electricity", (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*. 1845. — *Papers on electrostatics*, Art. II, nº 50).

[*] J. Clerk Maxwell, On Faradays Lines of Force, leída en la Cambridge Philosophical Society el 10 de diciembre de 1855 y el 11 de febrero de 1856 (*Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. X, part, I p. 27; 1864.— *Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, vol. 1, p. 156 ; Cambridge, 1890).

Luego desarrolla no la teoría de la propagación del calor en un medio conductor, sino una teoría del movimiento de un fluido en un medio resistente; este difiere del otro solo en el significado de las letras que emplea; pero en ambas estas letras se agrupan de acuerdo con las mismas fórmulas.

Estas fórmulas, Maxwell las extiende a la electricidad, de acuerdo con lo que acabamos de indicar ([**]): "La inducción eléctrica, dice, ejercida sobre un cuerpo a distancia, depende no solo de la distribución del electricidad en el cuerpo del inductor y la forma y posición del cuerpo inducido, pero también de la naturaleza del medio interpuesto o dieléctrico. Faraday expresa este hecho por la concepción de que una sustancia tiene una mayor capacidad inactiva o la conduce mejor las líneas de acción inductiva que otra.

Si suponemos que, en nuestra analogía del movimiento de un fluido en un medio resistente, la resistencia es diferente en diferentes medios, cuando le damos a la resistencia un valor menor, obtendremos un medio similar a un dieléctrico que conduce más fácilmente a las líneas de Faraday."

§ 3. *Discusión de la primera electrostática de Maxwell*

Cuando Maxwell, en la presentación que acabamos de analizar, habla de polaridad, carga eléctrica, función potencial, ¿tiene la intención de eliminar estas palabras del significado que habían recibido previamente en electrostática?, ¿Tiene la intención de definir nuevas cantidades, esencialmente distintas de las que llevaban los mismos nombres antes que él, y destinadas a reemplazarlas en una teoría irreductible a la antigua electrostática? El pasaje de sus memorias nos muestra claramente que no es así; que al usar palabras *carga eléctrica*, *función potencial*, *polaridad*, intenta usarlas en el sentido aceptado de todos; que no pretende crear una nueva electrostática, sino que, mediante una comparación, ilustrar la electrostática tradicional, la teoría de la polarización de los dieléctricos como la concibieron Faraday y Mossotti, en imitación de la teoría del magnetismo por Poisson.

En primer lugar, Maxwell al hablar del estado de la electrostática al momento de escribir no parece proponer ninguna modificación a las fórmulas aceptadas; luego, indica por qué cambio en el significado de las letras contenidas en las fórmulas pasaremos del problema del movimiento de un fluido en un medio resistente al problema eléctrico "ordinario", un epíteto cuyo uso excluye cualquier intención de revolucionar esta rama de Física. Sobre los imanes, Maxwell afirma claramente que las dos teorías en cuestión son, para él, matemáticamente equivalentes: "Un imán", dice, "se concibe como compuesto de partes magnetizadas elementales, cada una de las cuales tiene un polo norte y una polo sur; la acción de cada uno de estos polos sobre otro polo norte o sur se rige por leyes matemáticamente idénticas a las de la electricidad. En consecuencia, la misma aplicación de la idea de líneas de fuerza se puede hacer sobre este tema, y la misma analogía del movimiento de un fluido se puede emplear para ilustrarlo. " Esta analogía, Maxwell la desarrolla y la aplica a cuerpos magnéticos considerados como más conductores que el medio ambiente que los cuerpos diamagnéticos, considerados menos conductores que ese medio, y agrega: "Es obvio que

[**] Para hacer concordar nuestras notaciones con las que empleó Maxwell en la memoria citada, hay que reemplazar Ψ por $-V$; $ed\omega$ por dm; K por $1/K$; f,g,h por u,v,w; P, Q, R por X, Y, Z.

obtendremos los mismos resultados matemáticos si suponemos que la fuerza magnética tiene el poder de excitar el polaridad en el cuerpo, polaridad que tiene la misma dirección que las líneas de fuerza en los cuerpos paramagnéticos y la dirección opuesta en los cuerpos diamagnéticos".

Por lo tanto, es palpable que Maxwell, basándose en una analogía con las ecuaciones de calor, simplemente simuló dar una teoría de los dieléctricos, diferente desde el punto de vista de las hipótesis físicas, pero idéntica desde el punto de vista de las ecuaciones matemáticas, la teoría dominada por la hipótesis de moléculas polarizadas.

Maxwell no duda en admitir ([*]) que la función Ψ es analíticamente idéntica a la función potencial electrostático:

(40)
$$\Psi = \int \frac{e}{r} dw$$

Hasta ahora, en la teoría de Maxwell, sólo ha habido cuerpos dieléctricos; ¿Cómo se imagina Maxwell los cuerpos conductores? "Si la conductividad del dieléctrico es perfecta o casi perfecta para la pequeña cantidad de electricidad que consideramos", dice, "el dieléctrico se considera entonces un conductor, su superficie es una superficie de igual potencial y la atracción resultante en las proximidades de la superficie es normal a la superficie."

Hasta ahora, en la teoría de Maxwell, no ha habido más que cuerpos. Por lo tanto, para Maxwell, estrictamente hablando, no hay un cuerpo conductor; todos los cuerpos son dieléctricos, que difieren solo entre sí por el valor atribuido a K; para el éter del vacío, K es igual a 1; para los otros dieléctricos, K es mayor que 1; para algunos, K tiene un valor muy grande; esos son los conductores.

Por lo tanto, el problema electrostático surge de la siguiente manera:

La función Ψ, que define la ecuación (40), debe verificar en todo el espacio la ecuación (38); una vez que se determina esta función Ψ, las ecuaciones (37) harán conocer, en cada punto, el estado de polarización del medio.

La ecuación (40), que es una definición, implica identidad

$$\Delta\Psi = 4\pi e,$$

de modo que la ecuación (38) puede escribirse también

[*] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, vol. I, p. 176; Maxwell escribió la ecuación $V = -\Sigma dm/r$ que, con sus notaciones, es equivalente a la precedente.

$$\frac{\delta K}{\delta x}\frac{\delta \Psi}{\delta x}+\frac{\delta K}{\delta y}\frac{\delta \Psi}{\delta y}+\frac{\delta K}{\delta z}\frac{\delta \Psi}{\delta z}=0 \tag{41}$$

Esta condición es todo lo que la primera electrostática de Maxwell nos proporciona para determinar la función Ψ; pero está claro que es insuficiente para este objeto; primero, en un medio homogéneo, donde *K* es independiente de *x, y, z,* se reduce a una identidad y deja a la función Ψ completamente indeterminada en un medio similar; pero hasta en el caso en que, para evitar esta dificultad, rechazáramos la existencia de cualquier medio homogéneo, o no hubiéramos dado un paso para la determinación de Ψ, si una función Ψ satisface la ecuación (41), la función λΨ, donde λ es una constante, también lo verifica

La primera electrostática de Maxwell tiene solo la apariencia de una teoría física; pero cuando ella está cerca de ella, se desvanece.

CAPÍTULO III

La segunda electrostática de Maxwell

§1. *La hipótesis de las células eléctricas*

La primera electrostática fue, para Maxwell, solo un esbozo aproximado. Por el contrario, la segunda electrostática, que ahora vamos a exponer, constituye una teoría desarrollada, a la que su autor ha regresado en varias ocasiones más de cerca que la primera teoría y está inspirada en los puntos de vista de Faraday y especialmente de Mossotti sobre la constitución de los dieléctricos.

Faraday había considerado un dieléctrico sometido a la influencia eléctrica como un compuesto por partículas, cuyos dos extremos tienen cargas iguales y opuestas; pero había evitado toda hipótesis definida en cuanto a la naturaleza intrínseca de esa electricidad que poseen las partículas materiales, y por la cual pueden estar polarizadas o quedar en el estado neutral; le gustaba insistir en el hecho de que su teoría de la inducción es independiente de cualquier hipótesis sobre la naturaleza de la electricidad.

"Mi teoría de la inducción", dice él, ([*]) "no transmite ninguna afirmación sobre la naturaleza de la electricidad ni las diversas preguntas planteadas por ninguna de las teorías que se han presentado al respecto". Un cierto poder o dos ciertos poderes pueden desarrollarse o excitarse en los cuerpos, ¿cuál es su origen? Es un problema que mi teoría no pretenden abarcar, pero, al observar este hecho como dado por la observación y la experiencia, lo considera solo en sí mismo, estudia cómo se comporta la fuerza, mientras que se comunica a distancia en el fenómeno particular, pero muy extendido, que se denomina inducción electrostática.

Esta teoría no decide ni el valor absoluto de la fuerza, ni su naturaleza, sino sólo su distribución."

Mossotti no imitó la circunspección con la que Faraday se mantuvo al margen de cualquier hipótesis sobre la naturaleza de la electricidad y evitó pronunciar entre la teoría que supone dos fluidos eléctricos y la que admite un solo fluido. Mossotti fue partidario resuelto de las ideas de Franklin y las transportó a la exposición de la doctrina de Faraday. Él admitió que la electricidad está constituida por un solo fluido, que él llamó el *éter*; este fluido existe, hasta cierto grado de densidad, en los cuerpos en el estado neutral; si se condensa en una región, esta región está electrificada positivamente y está electrificada negativamente cuando el éter está enrarecido. En un dieléctrico en estado neutro, el éter forma una atmósfera alrededor de cada una de las partículas

[*] M. Faraday, "An Answer to D' Rare's Letter on certain theoretical Opinions", (*Sillimann's Journal*, vol. XXXIX, p. 108 – 120; 1840.— *Faraday's Experimental Researches in Electricity*, vol. II, p. 262).

materiales que no puede abandonar; cuando la molécula se somete a una fuerza inductiva, "la atmósfera etérea ([**]) condensada en un extremo, despliega una fuerza eléctrica positiva y enrarecida, mientras que en el extremo opuesto, expone una fuerza eléctrica negativa".

Es aceptando este pasaje de Mossotti que, al comienzo de la exposición de su segunda electrostática, Maxwell escribe ([***]) lo siguiente:

"Una fuerza electromotriz que actúa sobre un dieléctrico, produce un estado de polarización de sus partes similar, como distribución, a la polaridad de las partículas de hierro bajo la influencia de un imán y, como la polarización magnética, esa fuerza electromotriz puede ser representada bajo la forma de un estado en el que cada partícula tiene polos dotados de propiedades opuestas".

"En un dieléctrico sometido a inducción, uno puede concebir, en cada molécula, la electricidad desplazada de tal manera que una de las caras se electrifica positivamente y la otra negativamente, de modo que la electricidad permanece en su totalidad. unido a cada molécula y no puede moverse de una molécula a otra.".

"El efecto de esta acción en el conjunto de toda la masa eléctrica es producir un desplazamiento de la electricidad en una determinada dirección ... La magnitud de este desplazamiento depende de la naturaleza del cuerpo y la fuerza electromotriz, por lo que si *h* es el desplazamiento, *R* la fuerza electromotriz y *E* un coeficiente que depende de la naturaleza del dieléctrico,

(42) $$\boldsymbol{R} = -4\pi \boldsymbol{E}^2 \boldsymbol{h}$$ ([*])

... Estas relaciones son independientes de toda teoría sobre el mecanismo interno de los dieléctricos..."

Este pasaje, donde se afirma tan formalmente el acuerdo de la teoría que va a ser desarrollada, por un lado; con la teoría de la magnetización por influencia dada por Coulomb y Poisson, y, por otro lado, con las opiniones similares de Mossotti en lo que respecta a la polarización de los dieléctricos, es una información de gran importancia sobre las opiniones de Maxwell; que, de hecho, encontraremos reproducidas casi textualmente en todo lo que Maxwell escribió más tarde sobre electricidad e incluso en los primeros capítulos de la segunda edición de su Tratado, el último trabajo que tuvo en sus manos.

En la memoria: " *On Physical Lines of Force*", que nos proponemos analizar, Maxwell no sólo acepta estos resultados "independientemente de cualquier teoría", sino que busca una disposición de cuerpos fluidos y cuerpos sólidos que permita dar una interpretación mecánica de la misma, según

---

[**] *Mossotti, "Recherches théoriques sur l'induction électrostatique envisagée d'après les idées de Faraday", (Bibliothèque universelle, Archives, t. VI, p. 195, 1847).*

[***] *J. Clerk Maxwell, "On physical Lines of Force, Part. III: The Theory of molecular Vortices applied to statical Electricity", (Philosophical Magazine, enero y febrero de 1862. — Scientific Papers, vol. I, p. 491).*

[*] *El signo –, para el segundo miembro de la ecuación (42), viene dado, como veremos más adelante, por una falla material.*

sus palabras: "en honor a los físicos ingleses". Por lo que construyó un modelo mecánico de dieléctricos.

Maxwell admitió que cualquier dieléctrico puede considerarse como un mecanismo formado por dos sustancias: un fluido incompresible, sin viscosidad, al que él llamó *éter*, y un sólido perfectamente elástico, al que él llamó *electricidad*.

La electricidad forma las paredes muy delgadas de las células que llenan el éter. Dentro de cada célula, el éter está animado de movimientos de vórtice que explican las propiedades magnéticas del medio.

"Cuando las partículas del fluido etéreo son enviadas en una cierta dirección, sus acciones tangenciales sobre la sustancia elástica que forma las células deforman cada célula y ponen en acción una fuerza igual y opuesta debido a la elasticidad de las células. Una vez que cesa la primera fuerza, las celdas retoman, su forma original, y la electricidad toma la posición que había abandonado."

En esta representación de la polarización dieléctrica, el *desplazamiento* de la sustancia elástica llamada *electricidad* jugará exactamente el mismo papel que el *desplazamiento del fluido etéreo* del que hablaba Mossotti; él *medirá*, en cada punto, *la intensidad de la polarización*.

Las paredes elásticas de las células están deformadas por las fuerzas que actúan sobre ellas; sean $P, Q, R,$ las componentes de la fuerza en un punto y f, g, h, las componentes del desplazamiento en el mismo punto; las componentes f, g, h del desplazamiento dependen de los componentes P, Q, R de la fuerza. ¿De qué dependen?

La respuesta a esta pregunta depende de un problema de elasticidad que sería muy complicado aún si se diera la forma de las células, y que ni siquiera se puede plasmar en una ecuación, en tanto que esta forma permanezca desconocida. A falta de una solución exacta, Maxwell quedó satisfecho con una solución groseramente aproximada; él estudió la deformación de una sola célula, que supuso de forma esférica, y que estaba sometida a una fuerza paralela al eje OZ y que tiene exactamente el mismo valor R. Entonces encontró que

(42 bis) $$\boldsymbol{R} = 4\pi \boldsymbol{E}^2 \boldsymbol{h}$$

E^2 es una cantidad que depende de dos coeficientes de elasticidad de la materia que forma las células.

Generalizando este resultado, él admitió que, en todas las circunstancias, se tienen las ecuaciones

(43 bis) $$\boldsymbol{P} = 4\pi \boldsymbol{E}^2 \boldsymbol{f} \qquad \boldsymbol{Q} = 4\pi \boldsymbol{E}^2 \boldsymbol{g} \qquad \boldsymbol{R} = 4\pi \boldsymbol{E}^2 \boldsymbol{h}$$

En realidad, estas fórmulas no son las que dio Maxwell, sino aquellas que le habrían dado un resultado correcto. Como resultado de un manifiesto error de signo ([*]), sustituyó estas fórmulas por fórmulas incorrectas

(42) $$\boldsymbol{R} = -4\pi \boldsymbol{E}^2 \boldsymbol{h}$$

(43) $$\boldsymbol{P} = -4\pi \boldsymbol{E}^2 \boldsymbol{f} \qquad \boldsymbol{Q} = -4\pi \boldsymbol{E}^2 \boldsymbol{g} \qquad \boldsymbol{R} = -4\pi \boldsymbol{E}^2 \boldsymbol{h}$$

Las fórmulas que acabamos de escribir son generales; toman una forma más particular en el caso donde el equilibrio eléctrico se establece en el sistema; en este caso, de hecho, las teorías electrodinámicas desarrolladas por Maxwell en la misma memoria que analizamos ([**]) muestran que existe una cierta función Ψ (*x, y, z*), tal que tenemos

(44) $$\boldsymbol{P} = -\frac{\delta\Psi}{\delta \boldsymbol{x}}, \qquad \boldsymbol{Q} = -\frac{\delta\Psi}{\delta \boldsymbol{y}}, \qquad \boldsymbol{R} = -\frac{\delta\Psi}{\delta \boldsymbol{z}}$$

Además, si bien el razonamiento de Maxwell demuestra la existencia de esta función, no nos informa de ninguna manera sobre su naturaleza, aunque Maxwell insinuó lo siguiente: "La interpretación física de Ψ es que esta función representa la *tensión eléctrica* en cada punto del espacio ".

§ 2. *Los principios anteriores en los escritos posteriores de Maxwell*

Antes de seguir profundizando en las consecuencias de estos principios y analizarlos, indicaremos en qué forma se encuentran en los escritos publicados por Maxwell después de su memoria: *On physical Lines of Force*.

En 1864, Maxwell publicó una nueva memoria ([†]), muy extensa, sobre las acciones electromagnéticas. Él mismo definió el espíritu que guió la composición de este trabajo, de la siguiente manera:

"En una ocasión anterior, he intentado", dijo([††]), "describir un tipo particular de movimiento y un tipo particular de deformación, combinados para dar cuenta de los fenómenos." En esta memoria, he evitado cualquier hipótesis de esta naturaleza. En relación con los fenómenos conocidos de la inducción electrodinámica y la polarización dieléctrica, cuando uso términos como momento eléctrico y elasticidad eléctrica, no lo he hecho con otro propósito que no sea dirigir la

---

[*] J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol.. I, p. 495. De las ecuaciones (100) $R = -2\pi ma(e + 2f)$, (103) $h = ae/2\pi$, Maxwell obtiene la ecuación (104) $\boldsymbol{R} = 4\pi^2 \boldsymbol{m} \dfrac{\boldsymbol{e} + 2\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{e}} \boldsymbol{h}$. Además, todo esta Memoria de Maxwell está literalmente plagada de errores de signo.

[**] J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I, p. 482.

[†] J. Clerk Maxwell, "A dynamical Theory of the Electromagnetic Field", leída en la Royal Society of London el 8 de diciembre de 1864 (*Philosophical Transactions*, vol. CLV. — *Scientific Papers*, vol. I, p. 526).

[††] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, vol. I, p. 563.

mente del lector hacia fenómenos mecánicos que lo ayudarán a comprender los fenómenos eléctricos correspondientes. En esta memoria, las formas similares de hablar deben verse como ilustraciones y no como explicaciones."

Sin hacer ninguna hipótesis sobre la naturaleza de los fenómenos eléctricos, dar forma a las leyes que los gobiernan, que son análogas en todos los aspectos a las que afectan las ecuaciones de la Dinámica, esto será precisamente el objeto del *Tratado de Electricidad y Magnetismo*, del cual la memoria *A dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, es el borrador.

Maxwell no se muestra menos que en sus memorias anteriores: *On physical Lines of Force*, respetuoso de las hipótesis tradicionales sobre la polarización de los dieléctricos, escribió ([‡]), citando a Faraday y Mossotti: "Cuando una fuerza electromotriz actúa sobre un dieléctrico, produce un estado de polarización que se distribuye como la polaridad de las diversas partes de una masa de hierro sujeto a la influencia de un imán, así como a la polarización magnética, esta polaridad puede representarse como un estado en el que los polos opuestos de cada partícula están en condiciones opuestas."

"Cuando un dieléctrico está sujeto a la acción de una fuerza electromotriz, se debe admitir que la electricidad se desplaza en cada molécula de modo que un extremo de esta molécula se electrifica positivamente y el otro negativamente; pero la electricidad permanece totalmente retenida por la molécula, por lo que no puede pasar de esta molécula a una molécula vecina. El efecto que esta acción produce sobre la masa total del dieléctrico es un desplazamiento general de la electricidad en una dirección... En el interior del dieléctrico, no se detectan signos de electrificación, porque la electrificación de la superficie de cada molécula se neutraliza por la electrificación opuesta que está en la superficie de las moléculas contiguas, pero en la superficie que limita el dieléctrico, la electrificación ya no se neutraliza y observamos fenómenos que indican una electrificación positiva o negativa."

"La relación entre la fuerza electromotriz y la magnitud del desplazamiento eléctrico que produce depende de la naturaleza del dieléctrico, y en general, la misma fuerza electromotriz produce un mayor desplazamiento eléctrico en un dieléctrico sólido, como el vidrio y el azufre, que en el aire."

Si denotamos con *K* la relación entre la fuerza electromotriz y el desplazamiento, tendremos

$$\boldsymbol{P = Kf,} \quad \boldsymbol{Q = Kg,} \quad \boldsymbol{R = Kh} \tag{45}$$

Además, en el caso donde el equilibrio está establecido en el sistema, los componentes *P*, *Q*, *R* de la fuerza electromotriz están dados por las fórmulas

$$\boldsymbol{P} = -\frac{\delta\Psi}{\delta \boldsymbol{x}}, \qquad \boldsymbol{Q} = -\frac{\delta\Psi}{\delta \boldsymbol{y}}, \qquad \boldsymbol{R} = -\frac{\delta\Psi}{\delta \boldsymbol{z}} \tag{44}$$

[‡] J. Clerk Maxwell, *Ibid*., vol. I, p. 131.

donde Ψ es una función de *x, y, z* en forma analítica pero, sobre la cual los razonamientos electrodinámicos de Maxwell no nos enseñan nada acerca de su naturaleza: "Ψ," dice Maxwell ([*]), "es una función de *x, y, z* y *t* que sigue sin estar claro en cuanto a la solución de las ecuaciones de electrodinámica, ya que los términos que dependen de ellos desaparecen cuando se integran a lo largo de un circuito cerrado. Sin embargo, la cantidad Ψ puede determinarse en cada caso particular, cuando se conocen las condiciones actuales del sistema . La interpretación física de Ψ es que representa el *potencial eléctrico* en cada punto del espacio."

Este pasaje difícilmente difiere del que Maxwell escribe, acerca de la cantidad Ψ, en sus memorias: En *On Physical lines of Force*, sólo por la sustitución de los términos *potencial eléctrico* por las palabras *tensión eléctrica*. Pero, a pesar de la mayor precisión del nuevo término, nada en el razonamiento de Maxwell justifica la identificación analítica de la función Ψ y la función *potencial electrostático* de Green; tampoco hay una línea de texto o una ecuación que marque la admisión de Maxwell de esta asimilación, que sería incompatible con muchos de los resultados que el alcanzó.

Las ecuaciones que acabamos de escribir concuerdan, por supuesto, con las que hemos tomado prestadas de las memorias: *On Physical lines of Force*; difieren sólo por la sustitución del coeficiente *K* por el producto $4\pi E^2$; además, el error de signo que afectó a las ecuaciones (42) y (43) se corrige en las ecuaciones (45).

§3. *La ecuación de la electricidad libre*

Mediante la letra *e*, Maxwell representa, en su memoria: *A dynamical Theory of the Electromagnetic Field* ([**]), la cantidad de electricidad positiva libre contenida en la unidad de volumen de cualquier porción del campo, debido al hecho de que la electrificación de las diferentes partes del campo no se neutralizan exactamente con la electrificación de las partes vecinas ".

Acerca del pasaje sobre la polarización dieléctrica que tenemos, en el § anterior, tomado de la misma memoria, esta definición no deja dudas sobre el significado que Maxwell atribuye a la letra *e*; es la densidad sólida de la distribución eléctrica ficticia que es equivalente a la polarización dieléctrica; Esto es lo mismo que en el Capítulo I, hemos designado por la letra *e*.

Por otro lado como, para Maxwell, el desplazamiento (*f, g, h*) es ciertamente, el equivalente exacto de la intensidad de polarización, entre los componentes del desplazamiento y la cantidad *e*, él no duda en escribir ([‡]) la relación que Poisson había establecido entre los componentes de la magnetización y la densidad magnética ficticia, y que Mossotti había extendido a los dieléctricos:

(46)
$$e + \frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta g}{\delta y} + \frac{\delta h}{\delta z} = 0$$

[*] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, vol. I, p. 558.
[**] *Ibid*., vol. I, p. 161.
[‡] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, vol. I, p. 561, ecuación (*G*).

Una ecuación completa que fija la densidad superficial de la *electricidad libre* en la superficie de separación de dos dieléctricos 1 y 2. En las dos memorias que estamos analizando en este momento, Maxwell nunca habla de superficies de discontinuidad; y tampoco escribe esta ecuación; pero la forma está forzada, desde el momento en que uno acepta, por una parte, la ecuación anterior y, por otra parte, la equivalencia entre una superficie de discontinuidad y una capa muy delgada de paso; por lo tanto, podemos agregar a la ecuación anterior la relación

$$(47)\quad \boldsymbol{E + f_1 \cos (N_1,x) + g_1 \cos (N_1,y) + h_1 \cos (N_1,z) + f_2 \cos (N_2,x) + g_2 \cos (N_2,y)\ h_2 \cos (N_2,z) = 0}$$

Por medio de las ecuaciones (45), la igualdad (47) se convierte en

$$(48)\qquad \boldsymbol{E + \frac{1}{K_1}\,[P_1 \cos (N_1,x) + Q_1 \cos (N_1,y) + R_1 \cos (N_1,z)]\ +}$$
$$\boldsymbol{+\ \frac{1}{K_2}\,[P_2 \cos (N_2,x) + Q_2 \cos (N_2,y) + R_2 \cos (N_2,z)] = 0}$$

mientras que la ecuación (46) se convierte en

$$(49)\qquad \boldsymbol{e + \frac{\delta}{\delta x}\frac{P}{K} + \frac{\delta}{\delta y}\frac{Q}{K} + \frac{\delta}{\delta z}\frac{R}{K} = 0}$$

y, en el caso en el que el medio es homogéneo

$$(50)\qquad \boldsymbol{e + \frac{1}{K}\left(\frac{\delta P}{\delta x} + \frac{\delta Q}{\delta y} + \frac{\delta R}{\delta z}\right) = 0}$$

Esta ecuación, Maxwell no la escribió en su memoria: *A dynamical Theory of the electromagnetic Field*, pero se sigue inmediatamente de las ecuaciones (45) y (46) que él publicó.

En la memoria *On physical Lines of Force*, la obtiene por consideraciones, apenas diferentes de las anteriores, que debemos relatar.

Él parte ([*]) del principio de que "la variación del desplazamiento es comparable a una corriente", de modo que $\delta f/\delta x$, $\delta g/\delta y$, $\delta h/\delta z$, son los componentes de un flujo, el *flujo de desplazamiento* ([‡]), que debe agregarse respectivamente a los componentes del flujo de conducción, para formar los componentes *p, q, r,* del flujo total. "Si *e* denota la cantidad de electricidad libre por unidad de volumen, la ecuación de continuidad da

$$\boldsymbol{\frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\delta q}{\delta y} + \frac{\delta r}{\delta z} + \frac{\delta e}{\delta t} = 0}$$

[*] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, vol. I, p. 496.
[‡] Correspondería llamar "*Corriente de desplazamiento*, ya que no es un flujo (*N. del T.*)

Pero, por consideraciones que encontraremos cuando estudiemos la electrodinámica de Maxwell, él asigna a los componentes del flujo de conducción la forma

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta\gamma}{\delta y}-\frac{\delta\beta}{\delta z}\right), \quad -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta\alpha}{\delta z}-\frac{\delta\gamma}{\delta x}\right), \quad -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta\beta}{\delta x}-\frac{\delta\gamma}{\delta y}\right)$$

donde α, β, γ, son tres funciones de *x, y, z,* resulta de la cual la ecuación anterior permanece exacta si las sustituimos por *p, q, r,* los únicos componentes del flujo de desplazamiento, y que puede escribirse

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta g}{\delta y}+\frac{\delta h}{\delta z}\right)+\frac{\delta e}{\delta t}=0$$

o bien, en virtud de las igualdades (43 bis)

(51)
$$\frac{\delta}{\delta t}\left[\frac{\delta}{\delta x}\frac{P}{4\pi E^2}+\frac{\delta}{\delta y}\frac{Q}{4\pi E^2}+\frac{\delta}{\delta z}\frac{R}{4\pi E^2}\right]+\frac{\delta e}{\delta t}=0$$

y, en caso de un medio homogéneo

(52)
$$\frac{1}{4\pi E^2}\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta P}{\delta x}+\frac{\delta Q}{\delta y}+\frac{\delta R}{\delta z}\right)+\frac{\delta e}{\delta t}=0$$

Hasta este punto de razonamiento, uno podría dudar si Maxwell simplemente designó por *e* a la densidad de la distribución eléctrica ficticia equivalente a la polarización dieléctrica, o si incluyó alguna electrificación real comunicada al medio; una frase resuelve la pregunta: "Cuando no hay fuerzas electromotrices", dice ([*]), tenemos

$$e = 0$$

Por lo tanto, resulta claro que *e* tiene el mismo significado que en la memoria: *A dynamical Theory of the Electromagnetic Field*; además, las ecuaciones (51) y (52), permiten derivar las ecuaciones

(53)
$$\frac{\delta}{\delta x}\frac{P}{4\pi E^2}+\frac{\delta}{\delta y}\frac{Q}{4\pi E^2}+\frac{\delta}{\delta z}\frac{R}{4\pi E^2}+e=0$$

(54)
$$\frac{1}{4\pi E^2}\left(\frac{\delta P}{\delta x}+\frac{\delta Q}{\delta y}+\frac{\delta R}{\delta z}\right)+e=0$$

similares, a la notación, a las ecuaciones (49) y (50).

[*] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, vol. I, p. 497.

Permítanos señalar que en vez de escribir la ecuación (54), debido al error de signo que afecta las igualdades (43), Maxwell escribió ([**])

(54 bis) $$\frac{1}{4\pi E^2}\left(\frac{\delta P}{\partial x}+\frac{\delta Q}{\delta y}+\frac{\delta R}{\delta z}\right)=e$$

§4 *La segunda electrostática de Maxwell es ilusoria*

Las diferentes ecuaciones que acabamos de escribir son generales; en el caso donde el equilibrio se establece en el sistema, *P, Q, R* se relacionan con la función Ψ por las ecuaciones (44), que dan

(55) $$\begin{cases} f=-\dfrac{1}{4\pi E^2}\dfrac{\delta\Psi}{\delta x}, \quad g=-\dfrac{1}{4\pi E^2}\dfrac{\delta\Psi}{\delta y}, \quad h=-\dfrac{1}{4\pi E^2}\dfrac{\delta\Psi}{\delta z} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{o} \\ f=-\dfrac{1}{K}\dfrac{\delta\Psi}{\delta x}, \qquad g=-\dfrac{1}{K}\dfrac{\delta\Psi}{\delta y}, \qquad h=-\dfrac{1}{K}\dfrac{\delta\Psi}{\delta z} \end{cases}$$

Mediante las ecuaciones (44), las ecuaciones (53) y (49) dan

(56) $$\begin{cases} \dfrac{\delta}{\delta x}\left(\dfrac{1}{4\pi E^2}\dfrac{\delta\Psi}{\delta x}\right)+\dfrac{\delta}{\delta y}\left(\dfrac{1}{4\pi E^2}\dfrac{\delta\Psi}{\delta y}\right)+\dfrac{\delta}{\delta z}\left(\dfrac{1}{4\pi E^2}\dfrac{\delta\Psi}{\delta z}\right)-e=0 \\ \dfrac{\delta}{\delta x}\left(\dfrac{1}{K}\dfrac{\delta\Psi}{\delta x}\right)+\dfrac{\delta}{\delta y}\left(\dfrac{1}{K}\dfrac{\delta\Psi}{\delta y}\right)+\dfrac{\delta}{\delta z}\left(\dfrac{1}{K}\dfrac{\delta\Psi}{\delta z}\right)-e=0 \end{cases}$$

Las ecuaciones (54) Y (50) dan

(57) $$\frac{1}{4\pi E^2}\Delta\Psi-e=0, \qquad \frac{1}{K}\Delta\Psi-e=0,$$

y la ecuación (48) da

(58) $$\begin{cases} \dfrac{1}{4\pi E_1^2}\dfrac{\delta\Psi}{\delta N_1}+\dfrac{1}{4\pi E_2^2}\dfrac{\delta\Psi}{\delta N_2}-E=0 \\ \dfrac{1}{K_1}\dfrac{\delta\Psi}{\delta N_1}+\dfrac{1}{K_2}\dfrac{\delta\Psi}{\delta N_2}-E=0 \end{cases}$$

Si se conociera la función Ψ, las relaciones (55) determinarían las componentes del desplazamiento en cada punto del medio dieléctrico. Pero, ¿cómo se determinará la función Ψ? Por

[**] *Ibid*., Vol. I, p. 497, ecuación (115).

sí mismas, las igualdades (56), (57) y (58) no nos dicen nada más sobre esta función que las igualdades (55) de las que ellas derivan. Sería diferente si alguna teoría, — independiente de la que nos proporciona las ecuaciones (55) — , nos permitiera expresar *e* y expresar *E* por medio de las derivadas parciales de Ψ, por relaciones irreductibles a las relaciones (56), (57) y (58). Luego, al eliminar *e* y *E* entre las relaciones (56), (57), (58) y mediante estas nuevas relaciones, se obtendrían condiciones bajo las cuales estarían sujetas las derivadas parciales de la función Ψ, ya sea en cada punto del medio dieléctrico, o en la superficie de separación de dos dieléctricos diferentes.

Es mediante este método que se desarrollan, la teoría de la magnetización por influencia dada por Poisson y, la teoría de la polarización de los dieléctricos concebida por Mossotti, a imitación de la anterior.

Una vez que, mediante esta última teoría, pongamos las ecuaciones de la polarización en la forma [Capítulo I, ecuaciones (19)]

$$A = -\,\varepsilon F \frac{\delta}{\delta x}\left(V + \overline{V}\right),$$

$$B = -\,\varepsilon F \frac{\delta}{\delta y}\left(V + \overline{V}\right),$$

$$C = -\,\varepsilon F \frac{\partial}{\partial z}\left(V + \overline{V}\right)$$

desde cada punto de un medio continuo se obtendría la relación [Capítulo I, ecuación (20)]

$$\varepsilon \frac{\delta}{\delta x}\left[F \frac{\delta}{\delta x}\left(V + \overline{V}\right)\right] + \varepsilon \frac{\delta}{\delta y}\left[F \frac{\delta}{\delta y}\left(V + \overline{V}\right)\right] + \varepsilon \frac{\delta}{\delta z}\left[F \frac{\delta}{\delta z}\left(V + \overline{V}\right)\right] - e = 0 \tag{59}$$

similar a nuestras ecuaciones (56), y en la superficie de separación de dos medios dieléctricos, la relación [Capítulo I, ecuación (21)]

$$\varepsilon F_1 \frac{\delta}{\delta N_1}\left(V + \overline{V}\right) + \varepsilon F_2 \frac{\delta}{\delta N_2}\left(V + \overline{V}\right) - E = 0$$

análoga a nuestras relaciones (58). Pero eso no detiene la solución. La función $(V + \overline{V})$ que aparece en estas fórmulas no es simplemente una función continua y uniforme de *x*, *y*, *z*, es una función cuya expresión analítica se da de una manera muy precisa cuando se conoce la distribución eléctrica, real o ficticia; y de esta expresión analítica surgen, en virtud de los teoremas de Poisson, dos relaciones independientes de las precedentes; una [Capítulo I, igualdad (15)], verificada en cualquier punto de un dieléctrico continuo, polarizado pero no electrificado

$$\Delta\left(V + \overline{V}\right) = -\,4\pi e\,; \tag{61}$$

la otra expresión analítica [Capítulo I, ecuación (16)], verificada en la superficie de separación de dos de tales dieléctricos,

(62)
$$\frac{\delta}{\delta N_1}\left(V+\overline{V}\right)+\frac{\delta}{\delta N_2}\left(V+\overline{V}\right)=-4\pi E$$

Si luego comparamos, por un lado, las ecuaciones (59), (61), por otro lado, las ecuaciones (60) y (62), encontramos que las derivadas parciales de la función (V + $\overline{V}$) deben verificar, en cualquier punto de un dieléctrico continuo, la relación.

$$\frac{\delta}{\delta x}\left[(1+4\pi eF)\frac{\delta}{\delta x}\left(V+\overline{V}\right)\right]+\frac{\delta}{\delta y}\left[(1+4\pi eF)\frac{\delta}{\delta y}\left(V+\overline{V}\right)\right]+\frac{\delta}{\delta z}\left[(1+4\pi eF)\frac{\delta}{\delta z}\left(V+\overline{V}\right)\right]=0$$

Son precisamente estas ecuaciones diferenciales parciales las que servirán para determinar la función (V + $\overline{V}$) y, en consecuencia, el estado de polarización de los dieléctricos.

Las mismas circunstancias se encuentran en otros lugares y en todos los problemas análogos que proporciona la física matemática. Tomemos, por ejemplo, el problema de la conductividad del calor en un medio isótropo. Las hipótesis de Fourier derivan, al denotar, mediante j y J, las intensidades sólida o superficial de las fuentes de calor en la ecuación [Capítulo II, ecuación (34)]

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(k\frac{\delta T}{\delta x}\right)+\frac{\delta}{\delta y}\left(k\frac{\delta T}{\delta y}\right)+\frac{\delta}{\delta z}\left(k\frac{\delta T}{\delta z}\right)+j=0$$

verificado en todos los puntos de un medio continuo, mediante la ecuación [Capítulo II, Ecuación (35)]

$$k_1\frac{\delta T}{\delta N_1}+k_2\frac{\delta T}{\delta N_2}+J=0$$

verificada en la superficie de separación de dos medios,

Pero el problema de determinar la distribución de calor en el sistema no se resuelve hasta que nuevas hipótesis hayan conectado las intensidades j y J con la temperatura T. Para seguir avanzando, necesitaremos, por ejemplo, suponer que el entorno no contiene otra fuente de calor que la resultante de su propia capacidad calorífica, lo que equivale a escribir

$$j=-\rho\gamma\frac{\delta T}{\delta t}, \quad J=0$$

ρ es la densidad del cuerpo y γ su calor específico. Para la función T, las ecuaciones precedentes se convertirán en ecuaciones diferenciales parciales

$$\frac{\partial}{\delta x}\left(k\frac{\delta T}{\delta x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\delta T}{\delta y}\right)+\frac{\delta}{\delta z}\left(k\frac{\delta T}{\delta z}\right)-\rho\gamma\frac{\delta T}{\delta t}=0$$

$$k_1\frac{\delta T}{\delta N_1}+k_2\frac{\delta T}{\delta N_2}=0$$

que se usarán para determinar la distribución de temperatura en el sistema.

Nada análogo se da en la electrostática de Maxwell. De la función Ψ, que aparece en las ecuaciones (56), (57), (58), no sabe nada fuera de estas ecuaciones, excepto que es uniforme y continua; no tiene derecho a escribir ninguna igualdad sobre el tema de esta función que no sea una consecuencia de las ya dadas, y, de hecho, no escribe ninguna que no afirme derivar de ellas. allí; por lo tanto, no tiene medios para eliminar *e, E* y obtener una ecuación que se puede usar para determinar esta función Ψ.

Por lo tanto, debe reconocerse que *la segunda electrostática de Maxwell ni siquiera da como resultado poner en ecuaciones el problema de la polarización de un medio dieléctrico dado*.

§5. *Determinación de la energía electrostática*

Sin embargo, Maxwell intenta sacar algunas conclusiones de este problema planteado de manera incompleta; debe admitirse, que en este ensayo de constitución de una electrostática, es donde su imaginación, despreocupada en su totalidad de toda lógica, se da la carrera más libre.

El primer problema tratado es la formación de la *energía electrostática* o del potencial de las acciones ejercidas en un dieléctrico polarizado.

En su memoria: *On physical Lines of Force*, Maxwell admite pura y simplemente ([*]) que esta energía tiene valor

(63)
$$U=-\frac{1}{2}\int\left(Pf+Qg+Rh\right)d\omega$$

Luego, al invocar las fórmulas (43) y (44), encuentra que *U* puede ponerse en la forma

(64)
$$U=\frac{1}{2}\int\frac{1}{4\pi E^2}\left[\left(\frac{\delta\Psi}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta\Psi}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta\Psi}{\delta z}\right)^2\right]d\omega$$

Las fórmulas (43) se ven afectadas por un error de signo; si usamos las fórmulas correctas (43 bis), encontraríamos

[*] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, Vol. I. *p.* 497.

(64 bis) $$U=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{4\pi E^2}\left[\left(\frac{\delta\Psi}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta\Psi}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta\Psi}{\delta z}\right)^2\right]d\omega$$

La fórmula (64) se puede transformar mediante integración por partes; como Maxwell rechaza la existencia de superficies de discontinuidad (†), se puede poner en la forma

(65) $$U=-\frac{1}{2}\int\Psi\left[\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{1}{4\pi E^2}\frac{\delta\Psi}{\delta x}\right)+\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{1}{4\pi E^2}\frac{\delta\Psi}{\delta y}\right)+\frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{1}{4\pi E^2}\frac{\delta\Psi}{\delta z}\right)\right]d\omega$$

A partir de ahí, utilizando igualdades (44) e igualdad (54bis), afectadas por un error de signo similar al que afecta a las ecuaciones (43),Maxwell obtiene la ecuación

$$U=\frac{1}{2}\int\Psi e d\omega$$

También se lograría si, para la igualdad correcta (64bis), se aplicara la relación correcta (53).

Maxwell logra así una expresión de energía electrostática similar en forma a la expresión (39) que admitió en su primera teoría. Pero, en el camino, se ha encontrado con la igualdad (64) que, una vez corregida el error de un signo esencial que afecta las ecuaciones de la memoria: *On physical Lines of Force*, toma la forma (64bis).

Esta igualdad (64bis) conduce a un resultado preocupante.

La energía electrostática del sistema, cero en un sistema despolarizado, sería negativa en un sistema polarizado; disminuiría debido a la polarización; un conjunto de dieléctricos en el estado neutral estaría en un estado inestable; de inmediato, este estado perturbado, iría polarizándose con una intensidad cada vez mayor.

Cuando Maxwell compuso su Memoria: *A dynamical Theory of the electromagnetic Field*, retomó las ecuaciones dadas en la Memoria anterior, pero después de haberles quitado los errores de signo que las había alterado. A partir de ese momento, la consecuencia que acabamos de señalar puede haberle aparecido. ¿Es esta la razón por la que cambió la expresión de la energía electrostática en este nuevo trabajo? Aún así, en lugar de mantener la igualdad (63) para la definición de esta cantidad, ahora define esta cantidad por la igualdad (**)

(67) $$U=\frac{1}{2}\int(Pf+Qg+Rh)\,d\omega$$

---

† En este pasaje, Maxwell siempre razona como si E^2 tuviera el mismo valor en todo el espacio; pero uno puede fácilmente liberar del razonamiento esta suposición.

** J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, vol. I, p. 563.

En verdad, esta igualdad no se da aquí como una definición o un postulado, sino que se sigue de un razonamiento que reproduciremos:

* La energía se puede crear en el campo magnético de varias maneras, incluida la acción de una fuerza electromotriz que produce un desplazamiento eléctrico. El trabajo producido por una fuerza electromotriz variable *P* que produce un desplazamiento variable *f*, se obtiene formando el valor de la integral

$$\int Pdf$$

desde

$$P = 0$$

hasta el valor dado de *P*.

Como tenemos

$$P = Kf$$

esta cantidad se convierte en

$$\int Kfdf = \frac{1}{2}Kf^2 = \frac{1}{2}Pf$$

Por lo tanto, la energía intrínseca que existe en cualquier parte del campo, en forma de desplazamiento eléctrico, tiene el valor:

$$\frac{1}{2}\int (Pf + Qg + Rh)\, d\omega ."$$

Nos parece que este razonamiento debería más bien justificar la conclusión opuesta y obligar a Maxwell a preservar la expresión de la energía eléctrica, dada por la igualdad (63), que había adoptado por primera vez.

Parece bastante claro que, en el razonamiento anterior, *P*, *Q*, *R* deben considerarse como los componentes de una fuerza electromotriz *interior* al sistema, y no como los componentes de una fuerza electromotriz *externa* generada en el sistema por cuerpos que le son extraños.

De hecho, podemos notar, en primer lugar, que Maxwell nunca descompone todos los cuerpos que estudia en dos grupos, uno de los cuales se considera arbitrariamente dado, mientras que el otro, sujeto a la acción del primero, sufre modificaciones que el físico analiza. Parece más bien que sus cálculos se aplican a todo el universo, asimilados a un sistema aislado, de modo que todas las acciones que él considera son acciones internas.

En segundo lugar, si, en el razonamiento anterior, *P, Q, R* designan los componentes de una fuerza electromotriz externa, Maxwell debería haberles agregado las componentes de la fuerza electromotriz interna que surge del mismo hecho de la polarización del medio dieléctrico; la omisión de esta última fuerza haría que su cálculo fallara.

Por lo tanto, debemos pensar que el trabajo evaluado por Maxwell es para él un *trabajo interno*; pero entonces este trabajo es equivalente a una *disminución* y no a un aumento de la energía interna, por lo que la conclusión de Maxwell debe invertirse.

Maxwell lo conserva, sin embargo, y en un campo donde se establece el equilibrio, se tendrá, en consecuencia,

$$P = -\frac{\delta\Psi}{\delta x}, \quad Q = -\frac{\delta\Psi}{\delta y}, \quad R = -\frac{\delta\Psi}{\delta z}$$

él escribe (*) la ecuación (67) en la forma

$$U = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{\delta\Psi}{\delta x} f + \frac{\delta\Psi}{\delta y} g + \frac{\delta\Psi}{\delta z} h\right) d\omega$$

que una integración por partes transforma en

$$U = \frac{1}{2}\int \Psi\left(\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta g}{\delta y} + \frac{\delta h}{\delta z}\right) d\omega$$

o bien, en virtud de la ecuación (46)

(68) $$U = -\frac{1}{2}\int \Psi e \, d\omega$$

§6. *De las fuerzas que se ejercen entre dos pequeños cuerpos electrizados.*

A partir de la expresión de la energía electrostática, Maxwell buscará deducir las leyes de las fuerzas ponderomotrices que se ejercen en un sistema electrificado.

Veamos primero esta solución en la Memoria *On physical Lines of Force* (†).

El punto de partida es la expresión de la energía electrostática dada por la fórmula (66).

* J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, vol. I, p. 568.
† J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, vol. I, pp. 497 y 498.

Maxwell, que en la memoria en cuestión nunca considera una superficie de discontinuidad, no ha incluido ninguna electrificación superficial; sin embargo, para evitar ciertas objeciones que podrían hacerse a las siguientes consideraciones, será bueno tener en cuenta dicha electrificación y poner la energía electrostática en forma de

$$U = \frac{1}{2}\int \Psi e \, d\omega + \frac{1}{2}\int \Psi E \, dS \tag{69}$$

la segunda integral se extiende a las superficies electrificadas

Imaginemos que todo el espacio se llena con un dieléctrico homogéneo; E^2 tendrá en todos los puntos el mismo valor ([**]).

La densidad eléctrica sólida estará dada por la igualdad

$$\frac{1}{4\pi E^2}\Delta\Psi - e = 0 \tag{57}$$

que Maxwell debería escribir, debido al error de signo que afecta las ecuaciones (43),

$$\frac{1}{4\pi E^2}\Delta\Psi + e = 0 \tag{57 bis}$$

Por otra parte, en un punto de una superficie de discontinuidad donde lo normal tiene las dos direcciones N_i, N_e, la densidad superficial tendrá, de acuerdo con la primera ecuación (58), el valor dado por la ecuación

$$\frac{1}{4\pi E^2}\left(\frac{\delta\Psi}{\delta N_i} + \frac{\delta\Psi}{\delta N_e}\right) - E = 0 \tag{70}$$

que Maxwell debió escribir

$$\frac{1}{4\pi E^2}\left(\frac{\delta\Psi}{\delta N_i} + \frac{\delta\Psi}{\delta N_e}\right) + E = 0 \tag{70bis}$$

Se supone que una superficie de discontinuidad S_1 separa del conjunto del medio dieléctrico una porción 1 que se considerará capaz de moverse en este medio, a la manera de un sólido en un fluido. Se supondrá que la función Ψ, que será designada por Ψ_1, será armónica en todo el espacio, excepto en la región 1; en esta región, existirá una densidad sólida e_1; la superficie S_1 puede soportar adicionalmente la densidad superficial E_1. La energía electrostática del sistema será

[**] El lector evitará fácilmente cualquier confusión entre el coeficiente E^2 y la densidad superficial E.

$$U_1 = \frac{1}{2}\int \Psi_1 e_1 \, d\omega_1 + \frac{1}{2}\int \Psi_1 E_1 \, dS_1$$

Si el cuerpo 1 se desplaza al producirse su polarización, U_1 permanecerá invariable.

Para una superficie S_2, se aísla de la misma manera otra parte 2 del dieléctrico. Sea Ψ_2 una función armónica fuera de la región 2; ella corresponde a una densidad sólida e_2 en cualquier punto de la región 2 y a una densidad sólida E_2 en cualquier punto de la superficie S_2; si esta electrificación existiera sola en el medio, la energía electrostática sería

$$U_2 = \frac{1}{2}\int \Psi_2 e_2 \, d\omega_2 + \frac{1}{2}\int \Psi_2 E_2 \, dS_2$$

Ahora imaginemos que estos dos cuerpos electrificados existen simultáneamente en el medio dieléctrico, y que la función Ψ tiene el valor $(\Psi_1 + \Psi_2)$; la electrificación de cada uno de los dos cuerpos será la misma que si existiera solo; en cuanto a la energía electrostática del sistema, será notoriamente, de acuerdo con la igualdad (69).

$$U = \frac{1}{2}\int (\Psi_1 + \Psi_2) e_1 \, d\omega_1 + \frac{1}{2}\int (\Psi_1 + \Psi_2) E_1 \, dS_1 + \frac{1}{2}\int (\Psi_1 + \Psi_2) e_2 \, d\omega_2 + \frac{1}{2}\int (\Psi_1 + \Psi_2) E_2 \, dS_2$$

o bien

(71) $$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}\int \Psi_2 \, e_1 \, d\omega_1 + \frac{1}{2}\int \Psi_2 \, E_1 \, dS_1 + \frac{1}{2}\int \Psi_1 e_2 \, d\omega_2 + \frac{1}{2}\int \Psi_1 E_2 \, dS_2$$

Pero el teorema de Green da sin dificultad la igualdad

$$\int \Psi_1 \, \Delta\Psi_2 \, d\omega_2 + \int \Psi_1 \left(\frac{\delta\Psi_2}{\delta N_{2i}} + \frac{\delta\Psi_2}{\delta N_{2e}} \right) dS_2 = \int \Psi_2 \Delta\Psi \, d\omega_1 + \int \Psi_2 \left(\frac{\delta\Psi_1}{\delta N_{1i}} + \frac{\delta\Psi_1}{\delta N_{1e}} \right) dS_1$$

Ya sea usando las ecuaciones (57) y (70), o usando las ecuaciones (57bis) y (70bis), esta igualdad se puede escribir

$$\int \Psi_1 \, e_2 \, d\omega_2 + \int \Psi_1 \, E_2 \, dS_2 = \int \Psi_2 e_1 \, d\omega_1 + \int \Psi_2 E_1 \, dS_1$$

y transforma la igualdad (71) en

(72) $$U = U_1 + U_2 + \int \Psi_2 \, e_1 \, d\omega_1 + \int \Psi_2 \, E_1 \, dS_1$$

Dejando inmóvil el cuerpo 2, y desplazando el cuerpo l; U_1, y U_2 permanecen invariables y U experimenta un aumento

(73) $$\delta U = \delta \int \Psi_2\ e_1\ d\omega_1 + \delta \int\ \Psi_2\ E_1\ dS_1$$

Maxwell comenta que δU representa el trabajo que tendría que hacerse para mover el cuerpo 1 o, en otras palabras, el *trabajo resistente* generado por las acciones del cuerpo 2 sobre el cuerpo 1; el trabajo *realizado* por estas acciones es, por lo tanto,

$$-\delta U = -\delta \int \Psi_2\ e_1\ d\omega_1 - \delta \int\ \Psi_2\ E_1\ dS_1$$

Supongamos que el cuerpo 1 es un cuerpo muy pequeño y que δx, δy, δz son los componentes del desplazamiento de este cuerpo; si designamos por

$$q_1 = \int\ e_1\ d\omega_1 + \int\ \ E_1\ dS_1$$

a su carga eléctrica total, tendremos

$$-\delta U = -\ q_1\left(\frac{\delta\Psi_2}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta\Psi_2}{\delta y_1} dy_1 + \frac{\delta\Psi_2}{\delta z_1} dz_1\right)$$

El cuerpo 2 ejerce sobre el pequeño cuerpo 1 una fuerza cuyos componentes son

(75) $$\begin{cases} X_{21} = -\ q_1 \dfrac{\delta\Psi_2}{\delta x_1} = q_1 P_2, \\ Y_{21} = -\ q_1 \dfrac{\delta\Psi_2}{\delta y_1} = q_1 Q_2, \\ Z_{21} = -\ q_1 \dfrac{\delta\Psi_2}{\delta z_1} = q_1 R_2. \end{cases}$$

En virtud de las ecuaciones (57bis) y (70bis) podemos escribir

$$\Psi_2 = \int \frac{E^2 e_2}{r}\ d\omega_2 + \int \frac{E^2 E_2}{r}\ dS_2 = E^2 \int \frac{e_2}{r}\ d\omega_2 + E^2 \int \frac{E_2}{r}\ dS_2$$

Si el cuerpo 2 es muy pequeño y designamos por

(74bis) $$q_2 = \int\ e_2 d\omega_2 + \int\ E_2 dS$$

a su carga eléctrica total, en el punto x_1, y_1, z_1, tendremos

(76) $$\Psi_2 = E^2 \frac{q_2}{r}$$

Las igualdades (75) se pueden transformar en

(77) $$\begin{cases} X_{21} = E^2 \dfrac{q_1 q_2}{r^2} \dfrac{\delta r}{\delta x_1} \\ Y_{21} = E^2 \dfrac{q_1 q_2}{r^2} \dfrac{\delta r}{\delta y_1} \\ Z_{21} = E^2 \dfrac{q_1 q_2}{r^2} \dfrac{\delta r}{\delta z_1} \end{cases}$$

Lo que nos muestra que el cuerpo 2 ejerce sobre el cuerpo 1 una *fuerza de repulsión*.

$$F = E^2 \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Pero este resultado se obtiene mediante las igualdades (57bis) y (70bis), que se ven afectadas por un error de signo ([*]); si hacemos uso de las igualdades (57) y (70), donde se corrige este error de signo, encontraríamos que la igualdad (76) debería ser reemplazada por la igualdad

$$\Psi_2 = -E^2 \frac{q_2}{r}$$

y el cuerpo 2 ejercerá sobre el cuerpo 1 una *fuerza atractiva*

$$A = E^2 \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Esta consecuencia, que sin duda habría sorprendido a Maxwell, no se encontrará en la memoria: *A dynamical Theory of the electromagnetic Field*, gracias al cambio de signo que ha sufrido la expresión de la energía electrostática.

En esta memoria ([†]), Maxwell trata muy brevemente las acciones mutuas de los cuerpos electrificados al remitir al lector, que desea seguir los detalles del razonamiento, a la teoría de las fuerzas magnéticas que acaba de dar.

Este razonamiento, además, se lleva a cabo exactamente de acuerdo con el curso que acabamos de describir; sólo que, en lugar de tomar como punto de partida la expresión (66) de la energía electrostática, toma como punto de partida la expresión (68) de esta energía o, mejor, la expresión

[*] De hecho, Maxwell no escribe la ecuación (57bis), sino la ecuación (57) [*Loc. cit.*, igualdad (123)]; pero luego, él admite la expresión (76) de Ψ_2 como si hubiera escrito la ecuación (57bis).

[†] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, Vol I, pp. 566 a 568.

(79)
$$U = -\frac{1}{2}\int \Psi\, e\, d\omega - \frac{1}{2}\int \Psi\, E\, dS$$

De este cambio de signo de la energía electrostática, resulta el reemplazo de las igualdades (75) por las igualdades

(80)
$$\begin{cases} X_{21} = q_1 \dfrac{\delta\Psi_2}{\delta x_1} = -\, q_1 P_2, \\ Y_{21} = q_1 \dfrac{\delta\Psi_2}{\delta y_1} = -\, q_1 Q_2, \\ Z_{21} = q_1 \dfrac{\delta\Psi_2}{\delta z_1} = -\, q_1 R_2. \end{cases}$$

De acuerdo con estas ecuaciones, el *campo ponderomotriz* creado por el cuerpo 2 en el punto (x, y, z) tendría para los componentes $-P_2$, $-Q_2$, $-R_2$, mientras que el *campo electromotriz* creado por el mismo cuerpo, en el mismo punto, tendría para componentes P_2, Q_2, R_2; estos dos campos serían iguales, pero de *significados opuestos*, Maxwell, que escribió ([*]) las igualdades (80), no se detiene en esta conclusión paradójica. Reemplazando ([**]) Ψ_2 por la expresión

$$\Psi_2 = -\frac{K}{4\pi}\frac{q_2}{r}$$

análoga a la ecuación (76), él encuentra las ecuaciones

(82)
$$\begin{cases} X_{21} = \dfrac{K}{4\pi}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\dfrac{\delta r}{\delta x_1} \\ Y_{21} = \dfrac{K}{4\pi}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\dfrac{\delta r}{\delta y_1} \\ Z_{21} = \dfrac{K}{4\pi}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\dfrac{\delta r}{\delta z_1} \end{cases}$$

(83)
$$F = \frac{K}{4\pi}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

análogas a las igualdades (77) y (78).

[*] *Loc. cit*., p. 568, igualdades (D).

[**] En realidad, Maxwell escribió $\Psi_2 = \frac{K}{4\pi}\frac{q_2}{r}$ [*loc. cit.* igualdad (43)] pero este error de signo se compensa con un error de signo en igualdad (44).

Maxwell escribió: If the electrification of the field arises from the presence of a small electrified body containing e_1 of free electricity, the only solution of Ψ_1 is $\Psi_1 = \frac{k}{4\pi}\frac{e_1}{r}$ (43) where r is the distance from the electrified body.

The repulsion between two electrified bodies e_1, e_2, is therefore $e_2\Psi_1 = \frac{k}{4\pi}\frac{e_1 e_2}{r}$ (44). (*N. del T.*)

Maxwell llega así a una ley análoga a la ley de Coulomb, pero con la condición de hacer la hipótesis bastante extraña y singularmente peculiar de que los cuerpos electrizados tienen el mismo poder dieléctrico que el medio que los separa.

Además, esta conclusión se obtiene, en las memorias: *On physical Lines of Force*, solo a favor de un error de signo material y, en la memoria: *A dynamical Theory of the electromagnetic Field*, se deduce de una expresión de la energía electrostática de la cual, visiblemente, el signo es erróneo.

§7. *De la capacitancia de un condensador.*

Otro problema de electrostática que preocupó a Maxwell en las dos memorias que analizamos en este capítulo, fue el cálculo de la capacitancia de un condensador.

Sigamos, en primer lugar, la solución de este problema ([*]) dada en la memoria: *On physical Lines of Force*.

Imaginemos una placa dieléctrica plana, de espesor θ, colocada entre dos placas conductoras 1 y 2; Maxwell admite que la función Ψ toma, dentro de la placa conductora 1, el valor invariable Ψ_1, dentro de la placa conductora 2 el valor invariable Ψ_2; sobreentendiendo que, en el dieléctrico, Ψ es una función lineal de la distancia a una de las armaduras.

Para calcular la distribución eléctrica en un sistema de este tipo, Maxwell utiliza, para los conductores y los dieléctricos, la ecuación (54bis); para hacer su razonamiento riguroso, sería necesario agregar la ecuación análoga relacionada con la electrificación superficial de las superficies de discontinuidad. Deduce que la electrificación está localizada en las superficies de separación de las armaduras y el dieléctrico; en la superficie de separación de la armadura 1 y el dieléctrico, la densidad superficial

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{4\pi \boldsymbol{E}^2}\frac{\delta\Psi}{\delta \boldsymbol{N}_i} \tag{84}$$

$\boldsymbol{N_i}$ es la normal hacia el interior del dieléctrico.

Por otra parte

$$\frac{\delta\Psi}{\delta \boldsymbol{N}_i} = \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\theta}$$

Entonces, si *S* es el área de la superficie de cada armadura en contacto con el dieléctrico, la armadura 1 llevará una carga

[*] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, vol. I, p. 500.

(85) $$Q = ES = \frac{S}{4\pi E^2}\frac{\Psi_1 - \Psi_2}{\theta}$$

La armadura 2 llevará una carga igual y de sentido contrario. Maxwell definió la capacitancia de un condensador mediante la fórmula

(86) $$C = \frac{Q}{\Psi_1 - \Psi_2}$$

La igualdad (85) dará entonces

(87) $$C = \frac{1}{4\pi E^2}\frac{S}{\theta}$$

Esto permitirá ver a $\frac{1}{4\pi E^2}$ como el *poder inductor específico del dieléctrico*.

Pero este resultado se obtuvo solo haciendo uso de la igualdad (84), contaminada por el mismo error de signo que la igualdad (54bis); si hiciéramos uso de la igualdad correcta

(84bis) $$E = \frac{1}{4\pi E^2}\frac{\delta\Psi}{\delta N_i}$$

a lo que conduciría la primera igualdad (48), encontraríamos para *la capacidad del condensador el valor negativo*

(87bis) $$C = -\frac{1}{4\pi E^2}\frac{S}{\theta}$$

El error de signo que afecta a las igualdades (43) y, por lo tanto, a tantas igualdades de la memoria: *On physical Lines of Force*, desapareció en la memoria: *A dynamical Theory of electromagnetic Field*; la teoría del condensador contenido en esta memoria (*) ¿dará lugar a este resultado paradójico de que un condensador tenga una capacidad negativa? En lugar de ser llevado a este extremo, Maxwell cometerá aquí un nuevo error de signo, el mismo que en la memoria: *On physical Lines of Force*, y él escribió (*)

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = Kf$$

mientras que en algunas páginas anteriores, escribió (**)

[*] *Loc. cit.*, p. 572, igualdad (48).
[**] *Loc. cit.*, p. 560, igualdades (E).

$$\boldsymbol{P = Kf}$$

y también ([***])

$$\boldsymbol{P} = -\frac{\delta\Psi}{\delta \boldsymbol{x}}$$

[***] *Loc. cit.*, p. 568.

CAPÍTULO IV

La tercera electrostática de Maxwell

§1. *Diferencia esencial entre la segunda y la tercera electrostática de Maxwell*

Las fallas de los signos que acabamos de señalar sólo pueden ocultar la inevitable contradicción a la que choca la teoría del capacitor dada en la segunda electrostática de Maxwell.

En esta electrostática, debemos tomar en cuenta la densidad eléctrica *e*; esta densidad proviene del hecho de que la electrificación de algunos corpúsculos polarizados, de los cuales Maxwell admite su existencia, — al igual que Faraday y Mossotti,— no están exactamente neutralizados por la electrificación de los corpúsculos vecinos; esta densidad es el análogo de la densidad ficticia que Poisson nos ha enseñado a sustituir en la magnetización de una pieza de hierro. En ningún caso hay una cuestión de una densidad eléctrica que no sea esa; en ningún caso Maxwell tiene en cuenta una electrización que no es reducible a la polarización de los dieléctricos y una electrificación adecuada de los cuerpos conductores. ¿Qué es más claro, por ejemplo, que el siguiente pasaje ([*]), que leemos en la memoria: *A dynamical Theory of the electromagnetic Field*?

"Cantidad de electricidad"

"Sea que *e* representa la cantidad de electricidad positiva libre contenida en la unidad de volumen en cualquier parte del campo, entonces, como esa surge de la electrificación de las diferentes partes del campo que no se neutralizan entre sí, podemos escribir la *ecuación de la electricidad libre*

$$e+\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}=0\text{."}$$

Admitiendo este principio esencial de las teorías de Maxwell, retomemos el estudio de un capacitor plano formado por dos placas conductoras 1 y 2, que separa un dieléctrico.

Supongamos que la cara interna de la placa 1 está electrificada positivamente y la cara interna de la placa 2 negativamente; en la placa dieléctrica, el campo electromotor se dirige desde la placa 1 a la placa 2.

Si, de acuerdo con el error de signo cometido por Maxwell en su memoria: *On Physical Lines of Force* y reproducido en la parte de la memoria: *A dynamical Theory of the electromagnetic Field* donde se examina la teoría del capacitor, supusimos el desplazamiento dirigido en direcciones opuestas del campo electromotriz, el desplazamiento sería, dentro de la placa dieléctrica, dirigido desde el conductor 2 hacia el conductor 1.

[*] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, vol. I, p. 561.

Pero a excepción del lugar que acabamos de señalar, Maxwell nunca reprodujo esta opinión en sus escritos posteriores a la memoria: *On Physical Lines of Force*. En todas partes, admite que el desplazamiento es proporcional a la fuerza electromotriz, se dirige como tal.

"Debemos admitir", escribió ([*]) en 1868, que dentro del dieléctrico polarizado, hay un desplazamiento eléctrico en la dirección de la fuerza electromotriz."

"El desplazamiento está en la misma dirección que la fuerza, se repite en su *Treatise* ([**]) y, numéricamente, es igual a la intensidad multiplicada por K / 4π, donde K es el poder inductor específico del dieléctrico."

"En este Tratado", dice además, ([***]) "hemos medido la electricidad estática por medio de lo que hemos llamado *desplazamiento eléctrico*: es una magnitud dirigida o vectorial, que hemos designado por $\mathfrak{D}$, y cuyos componentes estaban representados por *f, g, h.* "

"En las sustancias isotrópas, el desplazamiento se efectúa en el sentido de la fuerza electromotriz que lo produce, y es proporcional al menos para los pequeños valores de esta fuerza. Esto es lo que puede expresar el ecuación:

$$\text{Ecuación del desplazamiento eléctrico,} \quad \boldsymbol{\mathfrak{D}} = \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{4\pi}} \boldsymbol{\mathfrak{E}}$$

donde ***K*** es la capacitancia dieléctrica de la sustancia."

Si designamos, con Maxwell, por P, Q, R los componentes de la fuerza electromotriz $\mathfrak{E}$, la igualdad simbólica anterior será igual a las tres igualdades ([‡])

$$\boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{4\pi}}\boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{4\pi}}\boldsymbol{Q}, \quad \boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{4\pi}}\boldsymbol{R}. \tag{88}$$

Finalmente, en el trabajo del cual Maxwell estaba preparando la publicación poco antes de su muerte, en uno de los capítulos escritos completamente por su mano, leemos ([†]):

---

[*] J. Clerk Maxwell, *On a Method of making a direct Comparaison of electrostatic with electromagnetic Force; with a Note on the electromagnetic Theory of Light* (Leída en la Royal Society of London el 18 de junio de 1868. *Philosophical Transactions*, vol. CLVIII. — *Scientific Papers*, vol. II, p. 139).

[**] J. Clerk Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*; Oxford, 1873, vol. I, p. 63. — *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, traducido de la 2ª edición en inglés por G. Seligmann-Lui; Paris, 1885-1887; tomo I, p. 73. — En adelante, nosotros citaremos el Tratado de Maxwell según la traducción francesa todas las veces que no se hayan realizado cambios en la primera edición en inglés.

[***] *Traité...*, vol. II, p. 287.

[‡] La comparación de las igualdades (88) con las igualdades (45) muestra que la cantidad $K/4\pi$, introducida aquí por Maxwell es la que él designó con $1/K$ en su memoria *A dynamical Theory of the electromagnetic Field*.

[†] J. Clerk Maxwell, *A elementary Treatise of Electricity*, edited by W. Garnett. — *Traité élémentaire d'Électricité*, traducido del inglés por Gustave Richard. Paris 1884, p. 141.

"De acuerdo con la teoría adoptada en este trabajo, cuando la fuerza electromotriz actúa sobre un dieléctrico, fuerza a la electricidad a desplazarse, en su dirección, en una cantidad proporcional a la fuerza electromotriz y de acuerdo con la naturaleza del dieléctrico ... "

Por lo tanto, si una placa dieléctrica se encuentra entre las dos placas de un capacitor donde una es eléctricamente positiva y la otra eléctricamente negativa, el desplazamiento será, en cada punto, dirigido desde la armadura positiva a la armadura negativa. Maxwell admite esta ley sin dudarlo:

"Cuando un dieléctrico está sujeto a la acción de una fuerza electromotriz", escribió en su *Note on the electromagnetic Theory of Light* ([*]), "experimenta lo que se puede llamar polarización eléctrica. Si se cuenta como positiva la dirección de la fuerza electromotriz, y si se supone que el dieléctrico está limitado por dos conductores, A ubicado en el lado negativo y B en el lado positivo, la superficie del conductor A se cargará con electricidad positiva y la superficie conductor B electricidad negativa."

"Como admitimos que la energía del sistema así electrificado reside en el dieléctrico polarizado, debemos admitir que, dentro del dieléctrico, ocurre un desplazamiento de electricidad en la dirección de la fuerza electromotriz."

La electrificación positiva de A y la electrificación negativa de B, repite en su gran Tratado ([**]), produce una cierta fuerza electromotriz que actúa de A hacia B en la capa dieléctrica, y esta fuerza electromotriz produce un desplazamiento eléctrico de A hacia B en el dieléctrico."

"Los desplazamientos", escribe más tarde ([***]), "a través de dos secciones cualesquiera de un mismo tubo de desplazamiento son iguales". En el origen de cada unidad de desplazamiento del tubo, hay una unidad de electricidad positiva y una unidad de electricidad negativa en el otro extremo."

¿Qué significado exacto le atribuye Maxwell a esta expresión *desplazamiento eléctrico* en sus trabajos posteriores?

En la memoria *A dynamical Theory of the electromagnetic Field*, donde presenta por primera vez esta expresión, Maxwell, como hemos visto, se inspiró en Mossotti. Para Mossotti, la fuerza electromotriz, que se encuentra con uno de los corpúsculos de los que están compuestos los cuerpos dieléctricos, expulsa el fluido etéreo de las partes de la superficie donde entra en el corpúsculo, para acumularlo en las regiones a través de las cuales sale. En las dos memorias que analizamos en el capítulo anterior, el pensamiento de Maxwell, concuerda plenamente con el de Mossotti. ¿Es lo mismo en sus escritos más recientes?

[*] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, vol. II, p. 339.
[**] J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. 1, p. 71.
[***] J. Clerk Maxwell, *Traité élémentaire d'Électricité*, p. 71.

No hay duda de que el desplazamiento sigue siendo, para Maxwell, un impulso de electricidad positiva que la fuerza electromotriz produce en su propia dirección, que se limita a cada pequeña porción del dieléctrico:

"La polarización eléctrica del dieléctrico (*) es un estado de deformación en el cual el cuerpo es empujado por la acción de la fuerza electromotriz, y que desaparece al mismo tiempo que esta misma fuerza. Podemos concebir que consiste en lo que se podría llamar un desplazamiento eléctrico producido por la intensidad electromotriz. Cuando una fuerza electromotriz actúa sobre un medio conductor, produce allí una corriente; pero si el medio es no conductor o dieléctrico, la corriente no puede establecerse a través del medio; la electricidad, sin embargo, se desplaza en el medio, en la dirección de la fuerza electromotriz, y la magnitud de este desplazamiento depende de la magnitud de la fuerza electromotriz. Si la fuerza electromotriz aumenta o disminuye, el movimiento eléctrico aumenta o disminuye en la misma proporción."

"La magnitud del desplazamiento se mide por la cantidad de electricidad que pasa a través de la unidad de superficie, mientras que el desplazamiento aumenta desde cero hasta su valor máximo, que es, por lo tanto, la medida de la polarización eléctrica."

Aún más formal, si es posible, es el siguiente pasaje (**): "Para hacer que nuestra concepción del fenómeno sea más clara, consideremos una célula aislada que pertenece a un tubo de inducción que emana de un cuerpo positivamente electrificado, y limitada por dos de las superficies equipotenciales consecutivas que envuelven el cuerpo."

"Sabemos que existe una fuerza electromotriz que actúa sobre el cuerpo electrificado hacia el exterior; si actuara en un medio conductor, esta fuerza produciría una corriente eléctrica, que duraría tanto como la acción de la fuerza. Pero si el medio no es conductor o es dieléctrico, la fuerza electromotriz tiene el efecto de producir lo que podría llamarse un *desplazamiento eléctrico*, es decir, que la electricidad es empujada hacia afuera en la dirección de la fuerza electromotriz. Este desplazamiento continúa en tanto continúa la fuerza electromotriz, pero tan pronto como la fuerza electromotriz desaparece, el medio recupera el estado que tenía antes del desplazamiento."

En sus últimas obras, la idea que Maxwell designa con las palabras: *desplazamiento eléctrico*, está de acuerdo con lo que él designa con las mismas palabras en sus primeras memorias, partiendo de la concepción de Mossotti, con la teoría de magnetización por influencia creada por el genio de Poisson. Además, Maxwell se preocupa por anunciar este acuerdo (†):

"Dado que, como hemos visto, la teoría de la acción directa a distancia es, desde un punto de vista matemático, idéntica a la teoría de una acción ejercida a través de un medio, los fenómenos que uno puede encontrar, pueden explicarse tanto por una teoría como por la otra ... Así, Mossotti dedujo la teoría matemática de los dieléctricos a partir de la teoría de la atracción ordinaria, simplemente, dando una interpretación eléctrica, en lugar de una interpretación magnética, a los

[*] J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. 1, p. 69.
[**] J. Clerk Maxwell, *Traité élémentaire d'Électricité*, p. 61.
[†] J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. 1, p. 74.

símbolos que Poisson utilizó para deducir la teoría de la inducción magnética a partir de la teoría de los fluidos magnéticos. Él admitió que hay pequeños elementos conductores en el dieléctrico que, probablemente, por inducción, tengan sus extremos electrificados en direcciones opuestas, pero incapaces de ganar o perder cierta cantidad de electricidad, ya que están aislados entre sí por un medio no conductor. Esta teoría de los dieléctricos se ajusta a las leyes de la electricidad y puede ser efectivamente cierta. Si ella es cierta, el poder inductor específico de un entorno puede ser mayor, pero nunca menor que el del aire o el del vacío. Hasta ahora, no se ha encontrado ningún ejemplo de un dieléctrico que tenga un poder inductor menor que el del aire; si encontramos uno, deberemos abandonar la teoría de Mossotti, pero sus fórmulas seguirán siendo todas exactas, sólo tendremos que cambiar el signo de un coeficiente."

"En la teoría que propongo desarrollar, los métodos matemáticos se basan sobre el menor número posible de hipótesis, y así encontramos que ecuaciones de la misma forma se aplican a fenómenos que, ciertamente, son de naturaleza muy diferente. Los ejemplos incluyen la inducción eléctrica a través de los dieléctricos, la conducción en los conductores y la inducción magnética. En todos estos casos, la relación entre la fuerza y el efecto que produce se expresa mediante una serie de ecuaciones de la misma especie; de modo que si se resuelve un problema para uno de estos temas, el problema y su solución se pueden traducir al lenguaje de los otros temas y los resultados, en su nueva forma, seguirán siendo correctos."

De todas estas citas, una consecuencia parece fluir lógicamente, entre los componentes *f*, *g*, *h*, del desplazamiento y las densidades eléctricas sólidas o superficiales *e*, *E*, uno tendrá que establecer las relaciones

(46) $$\boldsymbol{e + \frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta g}{\delta y} + \frac{\delta h}{\delta z} = 0}$$

(47) $$\boldsymbol{E + f_1 \cos (N_1,x) + g_1 \cos (N_1,y) + h_1 \cos (N_1,z) + f_2 \cos (N_2,x) + g_2 \cos (N_2,y)\ h_2 \cos (N_2,z) = 0}$$

De hecho, estas ecuaciones concuerdan con lo que Maxwell dijo sobre el desplazamiento eléctrico; ellas son un número de fórmulas esenciales de la teoría de Mossotti, que Maxwell declara matemáticamente idénticas a las suyas; además, en esta teoría son una transposición de las ecuaciones que Poisson introdujo en la teoría de la inducción magnética, y que Maxwell ([*]) conserva en la exposición de esta última teoría y que Maxwell las adoptó en sus primeros escritos.

Esto nos lleva a reconocer que las ideas de Maxwell conducen lógicamente a las igualdades (46) y (47) al analizar lo que él dice acerca de las *corrientes de desplazamiento*.

"Las variaciones del desplazamiento eléctrico ([†]) obviamente producen corrientes eléctricas, pero estas corrientes sólo pueden existir mientras el desplazamiento varía".

[*] J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. II, p. 11.
[†] J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. 1, p. 69.

"Una de las peculiaridades más importantes de este Tratado (††) consiste en esta teoría de que la verdadera corriente eléctrica $\mathfrak{C}$ (*u*, *v*, *w*) de la que dependen los fenómenos electromagnéticos no es idéntica a la corriente de conducción $\mathfrak{K}$ (*p*, *q* , *r*), y que, para evaluar el movimiento total de la electricidad, debemos tener en cuenta la variación en el tiempo del desplazamiento eléctrico $\mathfrak{D}$, de modo que debemos escribir:

Ecuación de corriente verdadera, $$\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \frac{\delta \mathfrak{D}}{\delta t}$$

o, en función de sus componentes

$$u = p + \frac{\delta f}{\delta t},$$

$$v = q + \frac{\delta g}{\delta t},$$

$$w = r + \frac{\delta h}{\delta t}."$$

Por lo tanto, en cualquier punto de un dieléctrico no conductor cuyo estado de polarización varía, se produce un corriente de desplazamiento cuyos componentes son

$$p' = \frac{\delta f}{\delta t}, \quad q' = \frac{\delta g}{\delta t}, \quad r' = \frac{\delta h}{\delta t} \tag{89}$$

Pero "sea cual sea la naturaleza de la electricidad (†††), y lo que queremos decir con movimiento de la electricidad, el fenómeno que hemos llamado *desplazamiento eléctrico* es un movimiento de electricidad, en el mismo sentido que el transporte una cantidad fija de electricidad."

O esta oración no significa nada, o requiere que los componentes *p'*, *q'*, *r'* del flujo de desplazamiento estén relacionados con las densidades eléctricas *e*, *E* por las ecuaciones de continuidad

$$\frac{\delta p'}{\delta x} + \frac{\delta q'}{\delta y} + \frac{\delta r'}{\delta z} + \frac{\delta e}{\delta t} = 0$$

$$\frac{\delta E}{\delta t} + p'_1 \cos(N_1,x) + q'_1 \cos(N_1,y) + r'_1 \cos(N_1,z) + p'_2 \cos(N_2,x) + q'_2 \cos(N_2,y) + r'_2 \cos(N_2,z) = 0$$

que, en virtud de las igualdades (89), se podrá escribir

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta g}{\delta y} + \frac{\delta h}{\delta z} + e\right) = 0$$

†† *Ibid.*, t. II, p. 288.
††† *Ibid.*, t. 1, p. 73.

$$\frac{\delta}{\delta t}\left[E + f_1 \cos (N_1,x) + g_1 \cos (N_1,y) + h_1 \cos (N_1,z) + f_2 \cos (N_2,x) + g_2 \cos (N_2,y) + h_2 \cos (N_2,z) \right] = 0$$

Integrado entre un instante en que el sistema estaba en estado neutral y el estado actual, estas ecuaciones dan las ecuaciones (46) y (47); este razonamiento es, además, dado por Maxwell en su memoria: *On physical Lines of Force*.

Examinemos las consecuencias de estas ecuaciones y, en particular, de la ecuación (47); aplicándola a la superficie de separación de un dieléctrico 1 y un conductor no polarizable 2; el desplazamiento (f_2, g_2, h_2) siendo cero en este último medio, la ecuación (47) se reduce a

$$E + f_1 \cos (N_1,x) + g_1 \cos (N_1,y) + h_1 \cos (N_1,z) = 0 \tag{90}$$

La superficie terminal del dieléctrico se electrifica negativamente en los puntos donde la dirección del desplazamiento o, la que equivale a la misma: la dirección de la fuerza electromotriz, penetra en el dieléctrico, y está positivamente electrificada en los puntos donde esta misma dirección deja el dieléctrico.

Aplicando esta proposición, – que deriva tan naturalmente de los principios postulados por Maxwell,– a nuestra placa dieléctrica entre dos conductores cargados, uno de electricidad positiva, el otro de electricidad negativa, obtenemos la siguiente conclusión:

La cara del dieléctrico que está en contacto con el conductor positivamente electrificado transporta electricidad negativa; la cara que está en contacto con el conductor electrificado negativamente transporta electricidad positiva. Por lo tanto, es imposible identificar la carga eléctrica transportada por un conductor con la carga tomada por el dieléctrico contiguo.

Por lo tanto, Maxwell va a renunciar a la suposición, – implícita en sus primeros escritos,– de que la electrificación propia de los cuerpos conductores no existe y que sólo la polarización de los medios dieléctricos es un fenómeno real, produciendo, por la aparente electrificación a la que es equivalente, los efectos que las teorías antiguas atribuían a las cargas eléctricas repartidas sobre los cuerpos conductores, Por el contrario; establece esta hipótesis más claramente y afirma su legitimidad:

"Uno puede concebir", dice ([*]), "la relación física que existe entre los cuerpos electrificados, ya sea como un efecto del estado en el que está el medio que separa los cuerpos, o como resultado de una acción directa que se ejerce a distancia entre los cuerpos [...]... haciendo los cálculos, en esta hipótesis, la energía total del medio, la encontramos igual a la energía que se debería a la electrificación de los conductores en la hipótesis de una acción directa a distancia. Por lo tanto, desde un punto de vista matemático, las dos hipótesis son equivalentes."

[*] J. Clerk Maxwell, *Traité d'Electricité et de Magnétisme*, t. 1, p. 67.

Dentro del medio (**), donde el extremo positivo de cada una de las células está en contacto con el extremo negativo de la célula vecina, estas dos electrizaciones se neutralizan exactamente, pero en los puntos donde el medio dieléctrico está limitado por un conductor, la electrificación ya no está neutralizada y constituye la electrificación que se observa en la superficie del conductor."

"A partir de estas ideas sobre la electrificación, debemos considerarla como una propiedad del medio dieléctrico, más que como del conductor rodeado por ese medio."

"En el caso de una botella de Leyden (†) cuyo armadura interior está cargada positivamente, cualquier porción de vidrio tendrá su superficie interna cargada positivamente y su superficie externa, negativamente. Si esta porción está completamente dentro del vidrio, su carga superficial es completamente neutralizada por la carga opuesta de las partes que toca, pero si está en contacto con un cuerpo conductor, en el que no se puede mantener el estado por inducción, la carga superficial ya no se neutraliza, sino que constituye la carga aparente que generalmente se denomina *carga del conductor*."

Como resultado, la carga en la superficie de separación del conductor y el medio dieléctrico, que en la antigua teoría se llamó *carga del conductor*, en la teoría de la inducción se debe llamar, *carga superficial del dieléctrico circundante*."

"De acuerdo con esta teoría, cualquier carga es el efecto residual de la polarización del dieléctrico."

Dado que Maxwell mantiene formalmente esta suposición, ¿cómo desaparecerá la contradicción que hemos señalado? De la manera más simple del mundo: en las ecuaciones (46) y (47), que hacen obvia esta contradicción, cambiará el signo de e y E y escribirá (‡)

$$\text{(91)} \qquad e = \frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta g}{\delta y} + \frac{\delta h}{\delta z}$$

$$\text{(92)} \quad E = f_1 \cos(N_1,x) + g_1 \cos(N_1,y) + h_1 \cos(N_1,z) + f_2 \cos(N_2,x) + g_2 \cos(N_2,y)\ h_2 \cos(N_2,z)$$

La igualdad (90), permite conocer la carga superficial de un dieléctrico en contacto con un conductor, – es decir, en la hipótesis de Maxwell. La carga del propio conductor, será luego reemplazada por la igualdad.

$$\text{(93)} \qquad E = f_1 \cos(N_1,x) + g_1 \cos(N_1,y) + h_1 \cos(N_1,z)$$

La carga será positiva cuando la dirección de desplazamiento o del campo electromotor penetre dentro del dieléctrico, negativa donde la dirección de desplazamiento o del campo electromotor salga del dieléctrico.

** J. Clerk Maxwell, *Traité élémentaire d'Électricité*, p. 63.
† J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t 1, p. 175.
‡ *Ibid.*, p. 289.

"En el caso de un conductor cargado (*), supuesto con carga positiva, en tal caso, si el dieléctrico circundante se extiende en todas las direcciones alrededor de la superficie cerrada, habrá polarización eléctrica y movimiento desde adentro hacia afuera en todo el la extensión de la superficie cerrada, y la integral del desplazamiento, tomada sobre toda la superficie, es igual a la carga del conductor encerrado en la superficie."

¿Cómo deberían polarizarse las masas elementales de un dieléctrico, si se desea que la electrificación en direcciones opuestas de sus dos extremos concuerde con las igualdades (91), (92), (93)?

Tomemos el ejemplo de una placa dieléctrica plana colocada entre dos placas conductoras. Se supone que dentro de la placa las cargas eléctricas opuestas en ambos extremos de una molécula son neutralizadas exactamente por las cargas de la molécula que la precede y de la molécula que la sigue. Solo la electrificación de moléculas extremas produce efectos apreciables.

La cara del dieléctrico por la cual la fuerza electromotriz entra en este medio manifiesta un estado de electrificación; se debe a la carga que las moléculas de la primera capa toman, en las extremidades por donde la fuerza electromotriz las penetra. La cara del dieléctrico por el cual la fuerza electromotriz sale de ese medio también muestra un estado de electrificación. Esta electrificación se debe a la carga que adquieren las moléculas de la última capa por donde la fuerza electromotriz las abandona. Ahora, de acuerdo con las proposiciones de Maxwell, la primera electrificación es positiva y la última negativa. Entonces, *cuando una fuerza electromotriz encuentra una molécula dieléctrica, la polariza; la extremidad de la molécula por la cual entra la fuerza electromotriz está cargada con electricidad positiva; la extremidad de la molécula por la cual se descarga la fuerza electromotriz se carga con electricidad negativa*.

Tal es la proposición (*), contraria a la admitida por Coulomb y Poisson en el estudio del magnetismo, al igual que Faraday y Mossotti en el estudio de los dieléctricos. Contrariamente a la opinión que profesó en sus primeros escritos, Maxwell la enunció formalmente en sus últimos tratados.

"Si suponemos (**) al volumen del dieléctrico dividido en partes elementales, debemos concebir las superficies de estos elementos como electrificadas, de tal manera que la densidad superficial en cualquier punto de la superficie sea igual en magnitud al desplazamiento que se produce en ese punto a través de la superficie, *este desplazamiento cuenta hacia el interior*, es decir que si el desplazamiento tiene lugar en la dirección positiva, la superficie del elemento debe estar electrificada negativamente en el lado positivo y positivamente en el lado negativo. Estas cargas

* J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme,* t. II, p, 72,

* No creo que ningún físico haya prestado atención al carácter paradójico de esta propuesta de Maxwell antes que H. Hertz la expusiera en una forma particularmente clara y llamativa. (H. Hertz, *Gesammelte Werke,* Bd. II: *Untersuchungen über die Aushreitung der elektrischen Kraft*; *Einleitende Uebersicht*, p. 27)

** J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 73.

superficiales generalmente se destruyen entre sí cuando se consideran elementos consecutivos, excepto en los puntos donde el dieléctrico tiene una carga interna, o en la superficie del dieléctrico."

"En el caso de una botella de Leyden ([***]) con carga positiva, cualquier porción del vidrio tendrá su superficie interna cargada positivamente y su superficie exterior negativamente."

"El desplazamiento ([†]) a través de cualquier sección de un tubo unitario de inducción, representa una unidad de electricidad, y la dirección del desplazamiento es la de la fuerza electromotriz, es decir, va de los potenciales mayores a los potenciales menores."

"Tenemos que considerar, además del desplazamiento eléctrico en la célula, el estado de los dos extremos de la célula formada por las superficies equipotenciales. Debemos suponer que en cada célula, la extremidad formada por la superficie de mayor potencial se cubre con una unidad de electricidad positiva, mientras que el extremo opuesto, formado por la superficie de potencial menor, está cubierto por una unidad de electricidad negativa."

En el *Treatise on Electricity and Magnetism*, así como en *An Elementary Treatise on Electricity*, algunas páginas, – a veces, sólo unas líneas,– separan los pasajes que acabamos de citar con afirmaciones como estas: "La fuerza electromotriz ([*]) tiene el efecto de producir lo que podríamos llamar un *desplazamiento eléctrico*, es decir, la electricidad es empujada en la dirección de la fuerza."

"Cuando la inducción ([**]) se transmite a través de un dieléctrico, primero hay un desplazamiento de electricidad en la dirección de la inducción. Por ejemplo, en una botella de Leyden cuya armadura interna está cargada positivamente y la armadura externa, negativamente, en desplazamiento de la electricidad positiva a través de la masa del vidrio es desde adentro hacia afuera."

"Cuando una fuerza electromotriz actúa sobre un medio conductor ([***]), produce una corriente, pero si el medio es no conductor o dieléctrico, la corriente no puede establecerse a través del medio, en la dirección de la fuerza electromotriz ... "

"Cualquiera que sea la naturaleza de la electricidad ([†]), y lo que sea que queramos decir con el movimiento de la electricidad, el fenómeno que hemos llamado *desplazamiento eléctrico* es un movimiento de electricidad, en el mismo sentido que el transporte de una cantidad determinada de electricidad a través de un cable es un movimiento de electricidad."

O este lenguaje no significa nada, o significa lo siguiente: cuando una fuerza electromotriz actúa sobre una parte elemental del dieléctrico, se altera el estado de neutralidad eléctrica de esa parte; *la*

[***] *Ibid.,* t. I. p. 175.
[†] J. Clerk Maxwell, *Traité élémentaire d'Électricité*, p. 63.
[*] J. Clerk Maxwell, *Traité élémentaire d'Électricité*, p. 62.
[**] J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 174.
[***] *Ibid.,* p. 69.
[†] *Ibid.,* p. 73.

electricidad se desplaza en la dirección de la fuerza electromotriz; se acumula, en exceso, en la extremidad a través de la cual la fuerza electromotriz abandona la partícula, de modo que esta extremidad se electrifica POSITIVAMENTE, *mientras que cuando ella abandona la extremidad por la cual la fuerza electromotriz entra en la partícula, en esa extremidad se electriza* NEGATIVAMENTE."

¿Cómo dos proposiciones, tan obviamente contradictorias, pudieron presentarse en el mismo momento en la mente de Maxwell y, al mismo tiempo, provocar su adhesión? Es un extraño problema de psicología científica que entregamos a las meditaciones del lector.

§2. *Desarrollo de la tercera electrostática de Maxwell.*

Si rechazamos esta primera contradicción y si admitimos las igualdades (91), (92) y (93), las ecuaciones de la tercera electrostática de Maxwell se desarrollan, en su tratado, libres de estos continuos cambios de signo que interrumpieron la marcha de la segunda electrostática.

Si *P, Q, R* son las componentes de la fuerza electromotriz, las componentes *f, g, h* del desplazamiento están dados por las igualdades ([*])

$$f = \frac{K}{4\pi} P, \quad g = \frac{K}{4\pi} Q, \quad h = \frac{K}{4\pi} R \tag{94}$$

donde *K* es el *poder inductor específico* del dieléctrico.

La energía electrostática del medio está dada por la proposición siguiente ([**])

"La expresión más general de energía eléctrica por unidad de volumen del medio está dada por el semi-producto de la intensidad electromagnética y la polarización eléctrica por el coseno del ángulo entre sus direcciones".

"En todos los dieléctricos fluidos, la intensidad electromotriz y la polarización eléctrica están en la misma dirección".

Por lo tanto, para estos últimos cuerpos ([***]), la energía electrostática es

$$U = \frac{1}{2} \int \left(Pf + Qg + Rh \right) dw \tag{95}$$

Para los mismos cuerpos que las ecuaciones (94) son válidas, se pueden aplicar dos expresiones para la energía electrostática ([‡]):

[*] J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 73, t.II, p. 287.
[**] *Ibid*., t. I. p. 67.
[***] *Ibid*., t. I. p. 176; t. II, p. 304.

(96) $$U = \frac{1}{8\pi}\int K\left(P^2 + Q^2 + R^2\right)dw$$

(97) $$U = 2\pi\int \frac{f^2 + g^2 + h^2}{K}\,dw$$

En el caso donde el sistema está en equilibrio eléctrico, las leyes de la electrodinámica muestran que existe una cierta función Ψ (*x*, *y*, *z*) tal que se tiene ([†])

(98) $$P = -\frac{\delta\Psi}{\delta x},\quad Q = -\frac{\delta\Psi}{\delta y},\quad R = -\frac{\delta\Psi}{\delta z}$$

y las expresiones (95) y (96) de la energía interna de un sistema pueden escribirse ([‡])

(99) $$U = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{\delta\Psi}{\delta x}f + \frac{\delta\Psi}{\delta y}g + \frac{\delta\Psi}{\delta z}h\right)dw$$

(100) $$U = \frac{1}{8\pi}K\int\left[\left(\frac{\delta\Psi}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta\Psi}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta\Psi}{\delta z}\right)^2\right]dw$$

Una integración por partes permite transformar la ecuación (99) en la ecuación

(101) $$U = \frac{1}{2}\int\Psi\left(\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta g}{\delta y} + \frac{\delta h}{\delta z}\right)dw + \frac{1}{2}\int\Psi\left[\begin{array}{l} f_1\cos(N_1x) + g_1\cos(N_1y) + h_1\cos(N_1z) + \\ + f_2\cos(N_2x) + g_2\cos(N_2y) + h_2\cos(N_2z)\end{array}\right]dS$$

Esta última integral se extiende a las diversas superficies de discontinuidad.

Mediante el uso de las fórmulas (91), (92) y (93), esta igualdad se convierte en ([*])

$$U = \frac{1}{2}\int\Psi e\,dw + \frac{1}{2}\int\Psi E\,dS$$

De hecho, en virtud de las ecuaciones (94) y (98), tenemos

(102) $$f = -\frac{K}{4\pi}\frac{\delta\Psi}{\delta x},\quad g = -\frac{K}{4\pi}\frac{\delta\Psi}{\delta y},\quad h = -\frac{K}{4\pi}\frac{\delta\Psi}{\delta z}$$

y las relaciones (91) y (92) se vuelven

[‡] J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 176.
[†] *Ibid*., t. II, p. 274, ecuaciones (B)
[‡] J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. II, p. 303.
[*] *Ibid.*, t. I, p. 108; t. II, p. 303.

(103) $$\frac{\delta}{\delta x}\left(K\frac{\delta\Psi}{\delta x}\right)+\frac{\delta}{\delta y}\left(K\frac{\delta\Psi}{\delta y}\right)+\frac{\delta}{\delta z}\left(K\frac{\delta\Psi}{\delta z}\right)+4\pi\varepsilon=0$$

(104) $$K\frac{\delta\Psi}{\delta N_1}+K\frac{\delta\Psi}{\delta N_2}+4\pi E=0$$

Maxwell, que presentó estas ecuaciones (**), las introdujo en su *Treatise*, no por el razonamiento anterior, sino por una conexión extraña y poco perceptible entre estas ecuaciones y las relaciones de Poisson.

(105) $$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 V}{\delta z^2}+4\pi e=0$$

(106) $$\frac{\delta V}{\delta N_1}+\frac{\delta V}{\delta N_2}+4\pi E=0$$

que satisfacen la función

(107) $$V=\int\frac{e}{r}dw+\int\frac{E}{r}dS$$

En una nota (*) añadida a la traducción francesa del Tratado de Maxwell, el Sr. Potier ya ha hecho justicia a este acercamiento; es bueno insistir en lo que es falaz.

Las igualdades (105) y (106) son consecuencias puramente algebraicas de la forma analítica de la función *V*, cuya forma está dada por ecuación (107). Por el contrario, la forma analítica de la función Ψ es desconocida y las igualdades (103) y (104) resultan de hipótesis físicas.

§ 3. *Volviendo a la primera electrostática de Maxwell*

Las ecuaciones que acabamos de escribir ofrecen una analogía profunda con las ecuaciones a las que conduce la teoría de la conductibilidad del calor; en su Tratado sobre Electricidad y Magnetismo, Maxwell no repite este enfoque, que fue el punto de partida de su investigación sobre los medios dieléctricos; pero él insiste en su Tratado Básico de Electricidad (**). Y, de hecho, uno pasa fácilmente de las fórmulas sobre la teoría del calor, dadas en el Capítulo II, a las fórmulas que Maxwell expone en su Tratado sobre Electricidad y Magnetismo si, entre las magnitudes que aparecen en estas fórmulas, se establece la siguiente tabla de correspondencia:

** J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 104.
* J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 106.

Teoría del calor	*Electrostática*
T: temperatura	Ψ;
u, v, w: componentes del flujo de calor	f, g, h: componentes del desplazamiento eléctrico
k: coeficiente de conductibilidad calorífica	$K/4\pi$: siendo K el poder inductor específico
j: intensidad de calor de una fuente sólida	e: densidad eléctrica de un sólido
J, intensidad de calor de una fuente superficial	E: densidad eléctrica superficial

Por lo tanto, las igualdades (33), (34) y (35) se transforman en las igualdades (102), (103) y (104).

Pero al desarrollar su primera electrostática, Maxwell, como hemos visto, admitió que la función Ψ se expresa analíticamente, como la función potencial V que se usa en la electrostática clásica y usó la fórmula

$$\Psi = \int \frac{e}{r} dw + \int \frac{E}{r} dS$$

Por el contrario, en su Tratado sobre Electricidad y Magnetismo, ([*]) advierte a sus lectores sobre esta confusión y designa una distribución eléctrica aparente, una distribución donde la densidad sólida e' y la densidad superficial E' harían conocer la función Ψ mediante la fórmula

(107bis)
$$\Psi = \int \frac{e'}{r} dw + \int \frac{E'}{r} dS$$

Según los teoremas de Poisson, tendríamos las igualdades

(105bis)
$$\frac{\delta^2 \Psi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \Psi}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \Psi}{\delta z^2} + 4\pi e' = 0$$

(106bis)
$$\frac{\delta \Psi}{\delta N_1} + \frac{\delta \Psi}{\delta N_2} + 4\pi E' = 0$$

Al comparar estas igualdades con las igualdades (103) y (104), vemos que las densidades aparentes e' E', no pueden ser iguales a las densidades e, E. En particular, las igualdades (103) y (105bis) dan,

(108)
$$4\pi(Ke' - e) = \frac{\delta K}{\delta x}\frac{\delta \Psi}{\delta x} + \frac{\delta K}{\delta y}\frac{\delta \Psi}{\delta y} + \frac{\delta K}{\delta z}\frac{\delta \Psi}{\delta z}$$

Las ecuaciones (104) y (106bis) dan ([†])

[*] J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 104.

(109)
$$\begin{cases} 4\pi\left(KE'-E\right)=\left(K_1-K_2\right)\dfrac{\delta\Psi}{\delta N_1} \\ 4\pi\left(KE'-E\right)=\left(K_2-K_1\right)\dfrac{\delta\Psi}{\delta N_2} \end{cases}$$

Al parecer, este sería el lugar para juzgar la electrostática de Maxwell y ver si puede estar de acuerdo con las leyes conocidas; pero nos falta un elemento para llevar a cabo esta discusión; este elemento es la noción de flujo de desplazamiento, que pertenece a la electrodinámica.

[†] En todas las ediciones del Tratado de Maxwell, estas ecuaciones (109) fueron reemplazadas por igualdades erróneas. En la traducción francesa, el término *Ke'* de la igualdad (108) se reemplaza por *e'*; este error no se encuentra en la primera edición en inglés.

SEGUNDA PARTE

LA ELECTRODINÁMICA DE MAXWELL

CAPÍTULO I.

Corriente de conducción y corriente de desplazamiento.

§1. *De la corriente de conducción*

El teórico busca darle a las leyes físicas una representación construida mediante símbolos matemáticos; esta representación debe ser lo más simple posible; las cantidades distintas que sirven para significar las cualidades consideradas como primarias e irreductibles deben ser, por lo tanto, las menores posible. Cuando se descubren nuevos hechos y cuando la experiencia ha determinado sus leyes, el físico debe esforzarse por expresar estas leyes por medio de los signos que ya están en uso en la teoría, para formularlos mediante magnitudes ya definidas. Solamente cuando reconoció la vanidad de tal intento, la imposibilidad de insertar las nuevas leyes en las viejas teorías, que decidió introducir en la Física magnitudes, hasta entonces inusuales, para establecer las propiedades de estas magnitudes mediante hipótesis que hasta entonces no se habían formulado. Así, cuando Œrstedt y después Ampère, descubrieron y estudiaron las acciones electrodinámicas y electromagnéticas, los físicos se esforzaron por formular las leyes sin introducir en la ciencia otros principios que los que hasta entonces habían sido suficientes para representar todos los fenómenos eléctricos y magnéticos, a saber: densidad eléctrica e intensidad de imantación; el conocimiento exacto de la distribución que afecta, en un instante dado, la electricidad distribuida sobre un conductor, pensaban que para eso era suficiente determinar las acciones que el conductor está haciendo en ese instante. Ampère no creía que estos intentos no fueran dignos de su genio; pero al haber reconocido finalmente que estaban condenado a la impotencia, imaginó definir las propiedades de un hilo conductor en un instante dado al indicar no sólo lo que es, en este instante y en cada punto del hilo, el valor del densidad eléctrica, sino también cuál es el valor de una nueva magnitud, la *intensidad de la corriente* que cruza el cable.

Desde el punto de vista de la lógica pura, la operación de introducir en una teoría física nuevas magnitudes para representar nuevas propiedades es una operación completamente arbitraria; de hecho, en esta operación, el teórico se deja guiar por una serie de consideraciones ajenas al dominio propio de la física, especialmente por las suposiciones que se formula, con respecto a la naturaleza de los fenómenos estudiados, las doctrinas filosóficas en las que cree y las explicaciones que se dan en su época y en su país. Por lo tanto, para definir las magnitudes adecuadas para reducir en teorías las leyes de las atracciones y las repulsiones eléctricas, los físicos se inspiraron en la opinión que le atribuían al comportamiento de un fluido o de dos fluidos. De manera similar, para definir magnitudes adecuadas para representar fenómenos electrodinámicos, se dejaron guiar por la idea de que una *corriente* de fluido eléctrico atraviesa el conductor interpolar e imitaron las fórmulas que, desde Euler, se usaban para estudiar la circulación de un fluido.

La analogía hidrodinámica ya había provisto a Fourier con el sistema de símbolos matemáticos mediante el cual logró representar la propagación del calor por conductibilidad; ese sistema de símbolos les proporcionó a G.S. Ohm, a W. Smaasen a G. Kirchhoff los medios para completar, en el sentido indicado por Ampère, la representación matemática de los fenómenos eléctricos.

A semejanza de la *velocidad* que tiene un fluido que circula en cada punto, imaginamos, en cada punto del cuerpo conductor y en cada instante, una cantidad dirigida, el *flujo eléctrico*.

Entre las componentes de la velocidad de un fluido en movimiento y la densidad de este fluido, existe una relación, *la relación de continuidad*; a semejanza de esta relación, entre las componentes u, v, w del flujo eléctrico, – que está relacionado con el punto (x, y, z) del conductor en el instante t, y la densidad eléctrica sólida σ en el mismo punto y en el mismo instante,– la existencia de la igualdad

$$\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta w}{\delta z}+\frac{\delta \sigma}{\delta t}=0 \tag{1}$$

A esta relación, se le agrega una referida a la densidad superficial Σ en un punto de la superficie de contacto entre dos medios distintos 1 y 2:

$$u_1 \cos(N_1 x)+v_1 \cos(N_1 y)+w_1 \cos(N_1 z)+u_2 \cos(N_2 x)+v_2 \cos(N_2 y)+w_2 \cos(N_2 z)+\frac{\delta \Sigma}{\delta t}=0 \tag{2}$$

En las mentes de los primeros físicos que los consideraron, las cantidades u, v, w representaban, en cada punto y en cada momento, las componentes de la velocidad con la que se mueve el fluido eléctrico; hoy en día, no debemos dudar en dejar de lado tal suposición y simplemente considerar u, v, w, como tres ciertas magnitudes, variables con las coordenadas y con el tiempo y que verifican las igualdades (1) y (2).

Para conocer completamente las propiedades de un conductor en un *instante aislado* t, los valores de las variables u, v, w, σ, y, en todos los casos, en cualquier punto de discontinuidad de las superficies, el valor de la variable Σ. Cuando se propone establecer las propiedades de un conductor en todo momento de un cierto período de tiempo, solo deben darse en el instante inicial los valores de las cinco magnitudes: σ, Σ, u, v, w; en otras ocasiones, es suficiente dar los valores de las variables u, v, w, Σ y σ, se deducen integrando las ecuaciones (1) y (2).

§2. *Sobre la corriente de desplazamiento*

Para representar las leyes conocidas que rigen las acciones de los cuerpos dieléctricos, Faraday, Mossotti y sus sucesores se contentaron con considerar una única magnitud dirigida, variable de un punto a otro y de un momento a otro, la intensidad de polarización, de componentes A, B, C.

Aunque a la época en que Maxwell escribió, no había experiencia alguna que justificara o incluso sugiriera tal hipótesis, él admitió que, en un instante aislado *t* de duración, el conocimiento, de las tres componentes *A*, *B*, *C* de la polarización no determinan completamente las propiedades del dieléctrico en ese instante; y supuso que ese cuerpo poseía propiedades, – en su mayoría desconocidas,– que, en el instante *t*, dependían no sólo de la intensidad de polarización o desplazamiento, sino de la *corriente de desplazamiento*, magnitud vectorial que tienen por componentes

$$(3) \qquad \bar{u} = \frac{\delta A}{\delta t}, \quad \bar{v} = \frac{\delta B}{\delta t}, \quad \bar{w} = \frac{\delta C}{\delta t}.$$

Las seis variables *A*, *B*, *C*, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, tienen valores que pueden ser escogidos arbitrariamente para un *instante dado*, pero no es lo mismo para todos los instantes de un cierto lapso de tiempo. Si, para todos esos momentos conocemos los valores de *A*, *B y C*, por el mismo hecho conoceremos los valores de $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$.

Si lo presentamos, como lo acabamos de hacer, como la introducción puramente arbitraria de una nueva magnitud de la cual ninguna experiencia exige su empleo, la definición dada por Maxwell de la corriente de desplazamiento parece extraña. Por el contrario, ella se vuelve muy natural y, por así decirlo, forzada, después de tener en cuenta las circunstancias históricas y psicológicas.

En el curso de sus investigaciones sobre los dieléctricos, hemos visto que Maxwell no cesaba de inspirarse en las hipótesis de Faraday y de Mossotti. A semejanza de lo que Coulomb y Poisson habían supuesto para los imanes, Faraday y Mossotti habían imaginado a un dieléctrico como un montón de pequeños granos conductores, embebidos en un cemento aislante, cada uno de esos pequeños granos conductores portando tanto electricidad positiva como electricidad negativa. Seguramente Maxwell, en todos sus escritos, consideró a esta imagen, si no como una representación fiel de la realidad, al menos como un modelo que sugería proposiciones siempre verificables.

Si, con Faraday y Mossotti, consideramos un dieléctrico polarizado como un conjunto de moléculas conductoras sobre las que se distribuye la electricidad de una cierta manera, cualquier cambio en el estado de polarización del dieléctrico consiste en una modificación de la distribución eléctrica en las moléculas conductoras; por lo tanto, estos cambios de polarización están acompañados por corrientes eléctricas reales, cada una de las cuales se localiza en un espacio muy pequeño. Además, es fácil ver que estas corrientes corresponden, en cada punto del dieléctrico, a una *corriente media* cuyas componentes están dadas precisamente por las igualdades (3). Esta corriente promedio es, por lo tanto, nada más que la corriente de desplazamiento.

En su memoria: *On physical Lines of Force*, Maxwell escribió ([*]), invitando a sus lectores a referirse al trabajo de Mossotti: "Una fuerza electromotriz, actuando sobre un dieléctrico, produce un estado de polarización de sus partes, similar a la distribución de polaridad en las partículas de

[*] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, vol. I, p. 491.

hierro que están sujetas a la influencia de un imán, al igual que la polarización magnética, esta polarización dieléctrica se puede representar como un estado en el que los dos polos de cada partícula están en posiciones opuestas."

"En un dieléctrico sometido a inducción, podemos concebir que la electricidad se desplaza en cada molécula de modo que una de sus extremidades se hace positiva y la otra negativa, pero la electricidad permanece completamente confinada en cada una de las moléculas y no puede pasar de una molécula a otra."

"El efecto de esta acción sobre la totalidad de la masa dieléctrica es el de producir un desplazamiento general de la electricidad en una determinada dirección. El desplazamiento no puede dar lugar a la producción de una corriente, porque, tan pronto como alcanza un cierto valor, permanece constante, pero constituye un comienzo de corriente, y sus variaciones constituyen las corrientes dirigidas en la dirección positiva o en la dirección negativa, según si el desplazamiento aumenta o disminuye. La magnitud del desplazamiento depende de la naturaleza del cuerpo y de la magnitud de la fuerza electromotriz, de modo que si h es el desplazamiento, R la fuerza electromotriz y E un coeficiente que depende de la naturaleza del dieléctrico, tendremos

$$R = -4\pi E^2 h \ (^\dagger)$$

"Si r es el valor de la corriente eléctrica debido al desplazamiento, tenemos

$$r = \frac{dh}{dt}. \text{ "}$$

Este pasaje, el primero donde Maxwell mencionó la corriente de desplazamiento, lleva la marca indiscutible de las ideas de Mossotti que llevaron al físico escocés a imaginar esta corriente.

Además, expresa tan exactamente la concepción de Maxwell de esta corriente, que la encontramos reproducida casi textualmente en las memorias: *A dynamical Theory of the electromagnetic Field* ([‡]); en el *Traité d'Electricité et de Magnétisme* ([◊]), leamos este pasaje muy breve: "Las variaciones del desplazamiento eléctrico obviamente producen corrientes eléctricas. Pero estas corrientes sólo pueden existir cuando el desplazamiento varía y, por consiguiente, el desplazamiento no puede exceder un cierto valor sin producir una descarga disruptiva, no pueden continuar indefinidamente en la misma dirección, como lo hacen las corrientes en los conductores."

"Sea cual sea la naturaleza de la electricidad, y lo que sea que entendamos por movimiento de la electricidad", agrega Maxwell ([*]), "el fenómeno que hemos denominado *desplazamiento eléctrico* es un movimiento de electricidad en el mismo sentido que decimos que el transporte de una cantidad determinada de electricidad a través de un cable, es un movimiento de electricidad."

[†] Hemos insistido [Primera Parte, Capítulo III] sobre el error de signo que afecta a esta igualdad.
[‡] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, vol. I, p. 531.
[◊] J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, traducción francesa t. I, p. 69.
[*] J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, traducción francesa t. I, p. 73.

Por lo tanto, una corriente de desplazamiento es esencialmente, similar a un flujo de conducción o una corriente eléctrica; en cualquier cuerpo conductor, dieléctrico o magnético, produce la misma inducción, la misma magnetización, las mismas fuerzas electrodinámicas o electromagnéticas que un flujo de conducción del mismo tamaño y dirección. Una corriente o un imán ejercen las mismas fuerzas en un dieléctrico atravesado por corrientes de desplazamiento que en un conductor que ocuparía el lugar de este dieléctrico y cuya masa sería atravesada por flujos de conducción iguales a esta corrientes de desplazamiento.

En los cálculos electrodinámicos jamás se deberá incluir solamente la corriente de conducción, de cuales, *u*, *v*, *w* son las componentes; siempre se deberá considerar la *corriente total*, suma geométrica de la corriente de conducción y de la corriente de desplazamiento, cuyas componentes son $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$. Este principio fue aplicado por Maxwell en sus diversos escritos sobre la electricidad ([‡]), y constituye uno de los fundamentos de su doctrina electrodinámica y una de las innovaciones más audaces y más fecundas, que él mismo remarcó en el pasaje ([†]): "Una de las particularidades más importantes de este Tratado, consiste en aplicar la teoría de que la corriente eléctrica verdadera, de la cual dependen los fenómenos electromagnéticos, no es idéntica a la corriente de conducción y que, para evaluar el movimiento total de electricidad, se debe tener en cuenta la variación del desplazamiento eléctrico con el tiempo."

§3. *En la teoría de Maxwell, ¿la corriente total es una corriente uniforme*?

Supongamos que en cada punto, tomado dentro de un dominio continuo, se cumple la igualdad

$$\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta w}{\delta z}=0 \tag{4}$$

y, que en cada punto de una superficie de discontinuidad, se cumple la igualdad

$$u_1 \cos(N_1 x)+v_1 \cos(N_1 y)+w_1 \cos(N_1 z)+u_2 \cos(N_2 x)+v_2 \cos(N_2 y)+w_2 \cos(N_2 z)=0 \tag{5}$$

En virtud de la igualdad (1), en el primer punto tendremos

$$\frac{\delta \sigma}{\delta t}=0$$

y en el segundo punto, en virtud de la igualdad (2)

[‡] J. Clerk Maxwell, *On physical Lines of Force* (*Scientific Papers*, vol. I, p. 496). — *A dynamical Theory of the electromagnetic Field*, (*Scientific Papers*, vol. I, p. 554). — *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, traducción francesa, t. II, p. 288.
[†] J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, traducción francesa t. II, p. 288.

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta t}=0$$

La distribución real de la electricidad permanecerá invariable.

Le daremos el nombre de *corriente de conducción uniforme* a aquellas corrientes de conducción que cumplan con las igualdades (4) y (5).

Las *corrientes de desplazamiento uniformes* son las corrientes de desplazamiento que verifican la igualdad

$$\frac{\delta\overline{u}}{\delta x}+\frac{\delta\overline{v}}{\delta y}+\frac{\delta\overline{w}}{\delta z}=0 \tag{6}$$

en todo medio continuo y verifican la igualdad

$$\overline{u}_1 \cos(N_1 x)+\overline{v}_1 \cos(N_1 y)+\overline{w}_1 \cos(N_1 z)+\overline{u}_2 \cos(N_2 x)+\overline{v}_2 \cos(N_2 y)+\overline{w}_2 \cos(N_2 z)=0 \tag{7}$$

en todo punto de una superficie de discontinuidad.

Si uno acepta la definición de las densidades eléctricas ficticias *e*, *E*, dadas por las igualdades (13) y (14) de la primera parte:

$$e=-\left(\frac{\delta A}{\delta x}+\frac{\delta B}{\delta y}+\frac{\delta C}{\delta z}\right) \tag{8}$$

$$E=-\left[A_1 \cos(n_1 x)+B_1 \cos(n_1 y)+C_1 \cos(n_1 z)+A_2 \cos(n_2 x)+B_2 \cos(n_2 y)+C_2 \cos(n_2 z)\right] \tag{9}$$

Se puede escribir, en general, en virtud de igualdades (3),

$$\frac{\delta\overline{u}}{\delta x}+\frac{\delta\overline{v}}{\delta y}+\frac{\delta\overline{w}}{\delta z}+\frac{\delta e}{\delta t}=0 \tag{10}$$

$$\overline{u}_1 \cos(N_1 x)+\overline{v}_1 \cos(N_1 y)+\overline{w}_1 \cos(N_1 z)+\overline{u}_2 \cos(N_2 x)+\overline{v}_2 \cos(N_2 y)+\overline{w}_2 \cos(N_2 z)+\frac{\delta E}{\delta t}=0 \tag{11}$$

Por lo tanto, las corrientes de desplazamiento uniformes verifican las igualdades

$$\frac{\delta e}{\delta t}=0\,, \qquad \frac{\delta E}{\delta t}=0\,,$$

de donde resulta, en todo el sistema, la invariabilidad de la distribución eléctrica ficticia equivalente a la polarización dieléctrica.

Puede suceder que ni la corriente de conducción ni la corriente de desplazamiento sean separadamente uniformes, sino que la *corriente total*, cuyos componentes son $(u+\overline{u})$, $(v+\overline{v})$, $(w+\overline{w})$, *sean uniformes*; entonces, se verificará, en cada punto de un medio continuo, la igualdad

(12) $$\frac{\delta}{\delta x}(u+\overline{u})+\frac{\delta}{\delta y}(v+\overline{v})+\frac{\delta}{\delta z}(w+\overline{w})=0$$

y, en cada punto de una superficie de discontinuidad, la igualdad

(13) $$\begin{aligned}&(u_1+\overline{u}_1)\cos(N_1x)+(v_1+\overline{v}_1)\cos(N_1y)+(w_1+\overline{w}_1)\cos(N_1z)+\\&+(u_2+\overline{u}_2)\cos(N_2x)+(v_2+\overline{v}_2)\cos(N_2y)+(w_2+\overline{w}_2)\cos(N_2z)=0\end{aligned}$$

De estas igualdades (12) y (13) derivan, en virtud de las igualdades (1), (2), (10) y (11), las igualdades

(14) $$\frac{\delta}{\delta t}(\sigma+e)=0,$$

(15) $$\frac{\delta}{\delta t}(\Sigma+E)=0.$$

La distribución eléctrica real puede variar de un instante a otro; es lo mismo que con la distribución ficticia equivalente a la polarización dieléctrica; pero en cada punto de un medio continuo o de una superficie de discontinuidad, la suma de la densidad eléctrica real y la densidad eléctrica ficticia mantienen un valor independiente del tiempo, de modo que las acciones electrostáticas que se ejercen en el sistema siguen siendo los mismos de un instante a otro.

Admitir que la corriente total es siempre uniforme sería, para aquel que al mismo tiempo reconoce la legitimidad de todas las ecuaciones precedentes, negar los fenómenos electrostáticos más conocidos; sería, por ejemplo, negar que un condensador pueda descargarse a través de un conductor estacionario insertado entre las dos armaduras.

La suposición de que en cualquier sistema, bajo cualquier circunstancia, la corriente total es siempre uniforme, es, según todos los comentaristas de Maxwell, uno de los principios esenciales sobre los que descansa la doctrina del físico escocés. Sigamos, a través de sus escritos, cómo se formó esta hipótesis.

En la memoria: *On Faraday's Lines of Force*, el primer trabajo de Maxwell dedicado a las teorías de la electricidad, no hay ninguna cuestión referida a la corriente del desplazamiento; sólo se considera la corriente de conducción; lo que se dice en ese trabajo concuerda fácilmente con las consideraciones generales que hemos expuesto en el § 1; en particular, Maxwell admite ([*]) que la

[*] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, vol. I, p. 192.

suma $\left(\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta w}{\delta z}\right)$ tiene un valor, generalmente, diferente de cero, que él designa con $4\pi\rho$; él agrega solamente estas palabras: "En una amplia clase de fenómenos, que incluye todos los casos en que las corrientes son uniformes, la cantidad ρ desaparece."

En la siguiente página; basándose sobre las propiedades electromagnéticas conocidas de una corriente cerrada (†), Maxwell muestra que los tres componentes *u, v, w* de la corriente de conducción pueden expresarse en la forma

$$(16) \qquad \begin{cases} -u = \dfrac{\delta\gamma}{\delta y} - \dfrac{\delta\beta}{\delta z} \\ -v = \dfrac{\delta\alpha}{\delta z} - \dfrac{\delta\gamma}{\delta x} \\ -w = \dfrac{\delta\beta}{\delta x} - \dfrac{\delta\alpha}{\delta y} \end{cases}$$

α, β, γ, son tres funciones de *x, y, z*, que él llama: las componentes de la *intensidad magnética*. De estas igualdades se deduce fácilmente la relación (4); por lo tanto, se aplican sólo a flujos uniformes. Esta conclusión no debe sorprender, la uniformidad de la corriente se postula en las premisas mismas del razonamiento que da las igualdades (16)

Maxwell resalta esta conclusión, pero se cuida de no deducir la imposibilidad de una corriente no uniforme: "Se puede observar", dice, "que las ecuaciones precedentes dan, por diferenciación,

$$\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta w}{\delta z}=0$$

que es la ecuación de continuidad de las corrientes uniformes. Por lo tanto, nuestras investigaciones por el momento se limitarán a las corrientes uniformes. Además, sabemos poco sobre los efectos magnéticos producidos por las corrientes que no son uniformes."

Es, a partir de la memoria: *On physical Lines of Force* que se introduce en el trabajo de Maxwell, la distinción entre las corrientes de conducción y las corrientes de desplazamiento.

En el punto (*x, y, z*), la velocidad instantánea media de rotación del éter tiene por componentes α, β, γ; esta velocidad representa (*), en la teoría cinética que Maxwell desarrolla en esta memoria, la *intensidad del campo magnético*; poniendo entonces

† Volveremos sobre esta demostración en el Capítulo II, §1.

* J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, vol. I, p. 460.

(17)
$$\begin{cases} \dfrac{\delta\gamma}{\delta y} - \dfrac{\delta\beta}{\delta z} = -4\pi u \\ \dfrac{\delta\alpha}{\delta z} - \dfrac{\delta\gamma}{\delta x} = -4\pi v \\ \dfrac{\delta\beta}{\delta x} - \dfrac{\delta\alpha}{\delta y} = -4\pi w \end{cases}$$

Maxwell admite (**) que *u*, *v*, *w* representan, en el punto (*x*, *y*, *z*) las componentes de la corriente de conducción, por lo tanto, *la corriente de conducción es uniforme por definición*. Esta proposición puede parecer sorprendente en un escrito en el que, implícitamente, la verdadera densidad eléctrica se supone siempre igual a cero, y donde, sólo, se introduce la densidad eléctrica ficticia, equivalente a la polarización dieléctrica.

Esto está vinculado (***) a los componentes de la corriente total por la ecuación de continuidad:

(18)
$$\frac{\delta}{\delta x}\left(u+\overline{u}\right)+\frac{\delta}{\delta y}\left(v+\overline{v}\right)+\frac{\delta}{\delta z}\left(w+\overline{w}\right)+\frac{\delta e}{\delta t}=0$$

que, por las igualdades (17), también se puede escribir:

$$\frac{\delta\overline{u}}{\delta x}+\frac{\delta\overline{v}}{\delta y}+\frac{\delta\overline{w}}{\delta z}+\frac{\delta e}{\delta t}=0$$

Por lo tanto, dado que, en esta memoria, Maxwell definió las corrientes de conducción como esencialmente uniformes, tuvo el cuidado de no plantear el mismo postulado respecto de las corrientes de desplazamiento.

También en la memoria: *A dynamical Theory of the electromagnetic Field*; con la ayuda de las leyes conocidas del electromagnetismo, leyes que presuponen esencialmente corrientes cerradas y uniformes, Maxwell estableció (†) las ecuaciones (17), que consideró que se aplican a todas las corrientes de conducción; por lo tanto, admitió que estas corrientes son siempre uniformes. Pero se cuidó de no extender esta proposición a la corriente total; él verificó (††) la igualdad (18), que implica, para la corriente de desplazamiento, la igualdad (19).

Cuando, en esta misma memoria, Maxwell desarrolla la teoría de la propagación de corrientes de desplazamiento en un medio dieléctrico, tiene cuidado de no pretender que estas corrientes son siempre y necesariamente corrientes transversales, sujetas a la condición

$$\frac{\delta\overline{u}}{\delta x}+\frac{\delta\overline{v}}{\delta y}+\frac{\delta\overline{w}}{\delta z}=0$$

** J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, vol. I, p. 462.
*** *Ibid.*, igualdad 113, vol. I, p. 496.
† J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, vol. I, p. 557.
†† J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, vol. I, p. 561, igualdad (*H*).

Por el contrario, admitió que en cada punto la densidad aparente *e* puede variar de un instante a otro, y estableció ([‡]) la ley que rige esta variación; Sin embargo, para deshacerse de las corrientes longitudinales que se introducirían y que obstaculizarían la teoría electromagnética de la luz, agregó estas palabras: "Si la sustancia es un aislante perfecto, la densidad *e* de la electricidad libre es independiente del tiempo." Nada en las ideas de Maxwell en esta memoria o en sus escritos anteriores justifica esta conclusión, la densidad *e*, vinculada a las variaciones en el desplazamiento eléctrico, de ninguna manera depende de la corriente de conducción.

La teoría electromagnética de la luz, sin embargo, requiere que las corrientes de desplazamiento en un dieléctrico no conductor se propaguen de acuerdo con las mismas leyes que los pequeños movimientos en un sólido elástico y no compresible([◊]); los principios postulados por Maxwell en sus diversas memorias no satisfacen este requisito; no ocurre lo mismo con la teoría singular que desarrolló Maxwell en su *Treatise on Electricity and Magnetism* y que hemos denominado su *tercera Electrostática*.

No existe ninguna otra parte de carga eléctrica que la carga ficticia debida a la polarización dieléctrica, ni otra densidad que las densidades *e*, *E*. Es a estas densidades que los componentes de la corriente de conducción estarán conectados por las relaciones de continuidad expresadas en su forma habitual. En cada punto de un medio continuo, tendremos ([*])

$$\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta w}{\delta z}+\frac{\delta e}{\delta t}=0 \tag{19}$$

y en cada punto de una superficie de discontinuidad, tendremos ([**])

$$u_1 \cos(N_1 x)+v_1 \cos(N_1 y)+w_1 \cos(N_1 z)+u_2 \cos(N_2 x)+v_2 \cos(N_2 y)+w_2 \cos(N_2 z)+\frac{\delta E}{\delta t}=0 \tag{20}$$

Pero, por otro lado, las densidades *e*, *E* están relacionadas con los componentes *A, B, C*, de la intensidad de la polarización dieléctrica, que Maxwell designa por *f, g, h* y que denominó *componentes del desplazamiento*; la relación entre estas cantidades está dada por las siguientes igualdades, que comentamos en la primera parte de esta escrito ([†]) y que Maxwell tuvo cuidado de recordar ([††]) junto con las igualdades que acabamos de escribir:

[‡] *Ibid*., vol. I, p. 582.

[◊] "...les petits mouvements dans un solide élastique et non compressible" en el original (*N. del T.*)

[*] J. Clerk Maxwell, *Traité d'Electricité et de Magnétisme*, traducción francesa, t. 1, p. 506, igualdad (2). Se observará que este párrafo contradice lo que afirmó Maxwell en la página 470, donde parece admitir que toda corriente de conducción es uniforme, conforme a sus antiguas ideas.

[**] J. Clerk Maxwell, *Loc. Cit.* t. I. p. 510, ecuación (5).

[†] Primera parte, igualdades (91) y (92)

[††] J. Clerk Maxwell, *Traité d'Electricité et de Magnétisme*, traducción francesa t. 1, p. 506, igualdad (1); p. 510, igualdad (4).

(21) $$e = \frac{\delta A}{\delta x} + \frac{\delta B}{\delta y} + \frac{\delta C}{\delta z}$$

(22) $$E = A_1 \cos(N_1 x) + B_1 \cos(N_1 y) + C_1 \cos(N_1 z) + A_2 \cos(N_2 x) + B_2 \cos(N_2 y) + C_2 \cos(N_2 z).$$

Derivando estas igualdades con respecto a *t*, teniendo en cuenta las igualdades (3) que definen las corrientes de desplazamiento, encontramos

(23) $$\frac{\delta \overline{u}}{\delta x} + \frac{\delta \overline{v}}{\delta y} + \frac{\delta \overline{w}}{\delta z} - \frac{\delta e}{\delta t} = 0$$

(24) $$\overline{u}_1 \cos(N_1 x) + \overline{v}_1 \cos(N_1 y) + \overline{w}_1 \cos(N_1 z) + \overline{u}_2 \cos(N_2 x) + \overline{v}_2 \cos(N_2 y) + \overline{w}_2 \cos(N_2 z) - \frac{\delta E}{\delta t} = 0$$

No es sorprendente que estas igualdades difieran en el signo de los términos $\delta e/\delta t$ y $\delta E/\delta t$, de las igualdades (10) y (11), que se derivan de la teoría habitual de la polarización dieléctrica y que Maxwell admitió, antes de haber concebido la electrostática particular que desarrolló en su *Treatise*.

Sumando miembro a miembro las igualdades (19) y (23) por un lado, y las igualdades (20) y (24) por el otro; encontramos en cada punto de un medio continuo, la igualdad

(25) $$\frac{\delta}{\delta x}(u + \overline{u}) + \frac{\delta}{\delta y}(v + \overline{v}) + \frac{\delta}{\delta z}(w + \overline{w}) = 0$$

y, en todo punto de discontinuidad superficial, la igualdad

(26) $$\begin{aligned}(u_{1.} + \overline{u}_1)\cos(N_1 x) + (v_1 + \overline{v}_1)\cos(N_1 y) + (w_1 + \overline{w}_1)\cos(N_1 z) + \\ + (u_2 + \overline{u}_2)\cos(N_2 x) + (v_2 + \overline{v}_2)\cos(N_2 y) + (w_2 + \overline{w}_2)\cos(N_2 z) = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, la última teoría electrostática adoptada por Maxwell conlleva las siguientes consecuencias:

No solo, en un medio continuo, los componentes de la corriente total satisfacen la misma relación que los componentes de la corriente dentro de un líquido incompresible, sino que también, en la superficie de separación entre dos medios diferentes, la corriente total no experimenta cambios repentinos en su magnitud o en la dirección. La corriente total, en cualquier sistema, corresponde a una corriente cerrada y uniforme.

Desde el momento en que Maxwell concibió su tercera electrostática, previó esta consecuencia, tan favorable a sus ideas sobre la teoría electromagnética de la luz. En una nota (*), donde señala

* J. Clerk Maxwell, On a method of making a direct comparison of electrostatic with electromagnetic force; with a note on the electromagnetic theory of light, leída en la *Royal Society of London* el 18 de junio de 1868 (*Philosophical Transactions*, vol. CLVIII. — *Scientific Papers*, vol. II, p. 139).

que la polarización de una placa dieléctrica colocada entre dos conductores va desde el conductor *A*, positivamente electrificado, al conductor *B*, electrificado negativamente, señala que eso lo condujo inevitablemente a su tercera electrostática, ya que él admitía que no había otra electrificación que la ficticia. Por eso agregó: "Si los dos conductores en cuestión están unidos por un cable, una corriente atravesará este cable de *A* hasta *B*. Al mismo tiempo, se producirá una disminución en el desplazamiento en el dieléctrico. Esta disminución será electromagnéticamente equivalente a una corriente que cruzaría el dieléctrico de *B* hasta *A*. De acuerdo con este punto de vista, la corriente que se obtiene al descargar un capacitor circula por un circuito cerrado."

Más tarde, en su *Treatise on Electricity and Magnetism*, Maxwell retoma ([**]) las mismas consideraciones con más desarrollos:

"Consideremos", dice, "un condensador formado por dos placas conductoras *A* y *B*, separadas por una capa dieléctrica *C*. Sea *W* un cable conductor que une *A* y *B*, y supongamos que, por la acción de una fuerza electromotriz, una cantidad *Q* de electricidad positiva se transporta de B hasta *A* ... Al mismo tiempo que una cantidad de electricidad *Q* es transportada por la fuerza electromotriz a lo largo del cable de *B* hasta *A*, cruzando todas las secciones del cable, una cantidad igual de electricidad pasa a través de todas las secciones del dieléctrico de *A* hacia *B*, en virtud del desplazamiento eléctrico."

"Durante la descarga del capacitor, se producirá un movimiento opuesto de electricidad. En el cable, la descarga es *Q* de *A* hacia *B*. En el dieléctrico, el desplazamiento desaparece, y una cantidad *Q* pasa a través de todas las secciones de *B* hasta *A*."

"Por lo tanto, todos los casos de electrificación y descarga se pueden considerar como movimientos que se ejecutan en un circuito cerrado de manera que, al mismo tiempo, en cada sección pasa la misma cantidad de electricidad, es así, no sólo en el circuito voltaico, para el cual eso siempre se había reconocido, sino también en los casos donde generalmente se suponía que la electricidad se acumulaba en ciertos puntos."

"Esto nos conduce a una consecuencia muy notable de la teoría que estamos considerando, a saber, que los movimientos de la electricidad son como los de un fluido incompresible."

En el "*Treatise*..." de Maxwell, a este pasaje le sigue la siguiente oración: "... Es decir, en todo momento debe entrar en un espacio cerrado, tanta electricidad como de él salga."

Al escribir esta oración, Maxwell olvidó por un momento el significado muy peculiar de esta proposición en su última teoría: que *la corriente total es uniforme*, para devolverle el significado que tenían en la mente la mayoría físicos, quienes lo seguían en sus primeros escritos. Pero este fue un descuido obvio. Es cierto que los componentes de la corriente total satisfacen las relaciones (25) y (26), análogas a las que caracterizan a una corriente uniforme; pero no es cierto que la cantidad de electricidad contenida en un espacio dado sea siempre invariable, ni que las cantidades $\delta e/\delta t$ y $\delta E/\delta t$ sean en todas partes iguales a 0; esta es una de las características paradójicas de la última

[**] J. Clerk Maxwell, *Traité d'Electricité et de Magnétisme*, traducción francesa t. 1, p. 71.

teoría de Maxwell, que la uniformidad de la corriente total de ninguna manera implica la invariabilidad de la distribución eléctrica ni de las acciones electrostáticas.

Sin embargo, si bien no es cierto que la cantidad de electricidad contenida en una superficie cerrada, permanece invariable, esta proposición se convierte en realidad cuando la superficie cerrada contiene sólo corrientes de desplazamiento, sin rastro de corrientes de conducción, o bien sólo corrientes de conducción, sin rastros de corrientes de desplazamiento; Para convencerse de ello, basta con mirar las igualdades (19) y (20), o las igualdades (21) y (22). Entonces cuando Maxwell, desarrollando, en su tratado, la teoría electromagnética de la luz, escribió ([*]): "Si el medio no es conductor ... la densidad en volumen de la electricidad libre es independiente de *t"*, él afirmó una consecuencia necesaria de la doctrina desarrollada en el *Treatise*, mientras que la misma frase, escrita por él, referida al mismo tema, en su memoria: *A dynamical Theory of the electromagnetic Field*, constituyó un paralogismo, en contradicción con las ideas admitidas en el curso de esta memoria.

Pero si la distribución eléctrica no puede variar dentro de un cuerpo conductor no dieléctrico, ni dentro de un dieléctrico no conductor, esta distribución puede variar de un instante a otro en la superficie por la cual un medio conductor encierra a un medio dieléctrico; estas variaciones dan lugar a fenómenos de carga y descarga que se estudian en electrostática.

§ 4. *Volviendo a la tercera electrostática de Maxwell, ¿qué tanto podemos estar de acuerdo con la electrostática convencional?*

Como hemos visto [Parte I, Capítulo IV, § 3] en su tercera electrostática, Maxwell evitó establecer alguna relación entre la función Ψ y las densidades *e*, *E*, distintas de las igualdades (103) y (105). Por lo tanto, uno podría creer que es permisible repetir aquí todo lo que hemos dicho en la Parte I, Capítulo III, § 4; expresar como ilusoria la tercera electrostática de Maxwell; declarar que ella no contiene los elementos necesarios para expresar mediante ecuaciones el más mínimo problema de distribución eléctrica.

Sería aún más tentador formular tal juicio que, en *su Treatise on Electricity and Magnetism*, Maxwell no utiliza esta electrostática; ni siquiera aborda la solución de los dos problemas que, en sus memorias: *On physical Lines of Force* y *A dynamical Theory of the electromagnetic Field*, había intentado resolver; no se ocupó ni de la teoría del capacitor ni de la teoría de las fuerzas que se ejercen entre los cuerpos electrificados.

Sin duda, en su *Treatise*, uno lee bien los capítulos o partes de capítulo que tratan sobre la distribución eléctrica o de las fuerzas electrostáticas. Pero los razonamientos que se desarrollan allí, las fórmulas empleadas en él, de ninguna manera se derivan de la electrostática particular cuyos principios hemos analizado; ambos dependen de la electrostática basada sobre las leyes de Coulomb y de la electrostática clásica creada por Poisson.

[*] J. Clerk Maxwell, *Traité d'Electricité et de Magnétisme*, traducción francesa t. II, p. 488.

Sin embargo, el juicio que acabamos de esbozar sería injusto; en el sistema de Maxwell uno puede obtener una ecuación para un problema electrostático; basta con introducir las suposiciones adecuadas que reemplacen la expresión analítica de la función potencial deducida, en la teoría ordinaria de las leyes de Coulomb.

Dentro de un cuerpo conductor, los componentes de la corriente de conducción son proporcionales a los componentes de la fuerza electromotriz; para que haya equilibrio, las primeras deben anularse con las segundas, de allí que se expresen mediante las igualdades.

$$\frac{\delta\Psi}{\delta x} = 0\,, \qquad \frac{\delta\Psi}{\delta y} = 0\,, \qquad \frac{\delta\Psi}{\delta z} = 0\,.$$

En la misma masa conductora, la función Ψ tendrá, en cada punto, el mismo valor.

Dentro de un cuerpo no conductor, la corriente de conducción será cero en todas sus partes. A partir de ello, las igualdades (25) y (26) se vuelven

$$\frac{\delta\overline{u}}{\delta x} + \frac{\delta\overline{v}}{\delta y} + \frac{\delta\overline{w}}{\delta z} = 0$$

$$\overline{u}_1 \cos(N_1 x) + \overline{v}_1 \cos(N_1 y) + \overline{w}_1 \cos(N_1 z) + \overline{u}_2 \cos(N_2 x) + \overline{v}_2 \cos(N_2 y) + \overline{w}_2 \cos(N_2 z) = 0$$

O bien, en virtud de las igualdades (23) y (24)

$$\frac{\delta e}{\delta t} = 0\,, \qquad \frac{\delta E}{\delta t} = 0\,.$$

Dentro de un cuerpo aislante continuo o en la superficie de contacto entre dos cuerpos aislantes diferentes, la distribución eléctrica es invariable. En general, postulamos que las dos densidades son iguales a cero:

$$e = 0 \quad \text{y} \quad E = 0$$

En verdad, este postulado no está explícitamente establecido en los escritos de Maxwell, pero se puede decir que está implícito en él; en cada instante Maxwell, como hemos visto, repite que la carga eléctrica, que es el efecto residual de la polarización, no se siente fuera del dieléctrico, sino sólo en la superficie de contacto del conductor y el dieléctrico; además hemos citado pasajes de Faraday y Mossotti donde estos autores expresaron una opinión similar. Interpretaremos el pensamiento de Maxwell sin distorsionarlo al expresar que las dos densidades eléctricas son cero en cualquier medio aislante.

Debe señalarse que, en la teoría clásica, uno está obligado a introducir un postulado que tenga analogías con el precedente; allí, además de la polarización dieléctrica y la carga eléctrica *ficticia* que le es equivalente, se considera una carga eléctrica *verdadera*; en un cuerpo no conductor, este último afecta una distribución invariable que, en cada problema, uno debe considerarlo como dado;

y, en la mayoría de los casos, se supone que la carga eléctrica verdadera es nula en todos los puntos de los cuerpos aislantes que se consideran; pero esta hipótesis no prejuzga nada sobre la electrificación ficticia y la polarización a la que ella equivale.

En el sistema de Maxwell, además de la carga eléctrica aparente que es equivalente a la polarización dieléctrica, no se encuentra más que carga eléctrica verdadera; sólo la última existe. En los malos conductores, ella muestra el carácter de invariabilidad, atribuido por la teoría clásica, a la verdadera carga eléctrica; es ella quien debe ser considerada como un dato.

Si igualamos a cero las densidades e y E, las igualdades (103) y (104) de la primera parte se transforman en la igualdad

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(K\frac{\delta\Psi}{\delta x}\right)+\frac{\delta}{\delta y}\left(K\frac{\delta\Psi}{\delta y}\right)+\frac{\delta}{\delta z}\left(K\frac{\delta\Psi}{\delta z}\right)=0\,,$$

verificada en todo punto de un medio aislante continuo y en la igualdad

$$K_1\frac{\delta\Psi}{\delta N_1}+K_2\frac{\delta\Psi}{\delta N_2}=0\,,$$

que se verifica en la superficie de separación de dos medios aislantes distintos.

Así obtenemos ecuaciones que determinan la función Ψ y, lo que es más importante, estas ecuaciones son las que servirían para determinar la función potencial electrostático, según la teoría clásica, en un sistema donde cada dieléctrico tendría un poder inductor específico proporcional a K.

La analogía entre la teoría de Maxwell y la teoría clásica es completa, en el caso en que los conductores están inmersos en *un único dieléctrico homogéneo*. En este caso, la función Ψ, constante en el interior de cada conductor, debe verificar en el espacio interpuesto la igualdad $\Delta\Psi = 0$; una vez determinado por estas condiciones, la función Ψ a su vez determina la densidad superficial de cada conductor por la igualdad (104) de la Primera parte, que se convierte en

$$\frac{\delta\Psi}{\delta N_e}=-\frac{4\pi}{K}E$$

Por consiguiente, queda claro que uno puede escribir

$$\Psi=\frac{1}{K}\int\frac{E}{r}dS$$

la integral se extiende a todas las superficies electrificadas. La energía electrostática tiene valor

$$U=\frac{1}{2}\int\Psi E dS$$

o bien

$$U = \frac{1}{2K}\iint \frac{EE'}{r} dSdS'$$

Comparemos estas fórmulas con las dadas por las teorías clásicas, cuyos principios se recuerdan en el Capítulo I de la Primera parte.

Supongamos que, en un medio impolarizable, dos cargas eléctricas q y q' separadas por la distancia r, se repelen entre sí con una fuerza ε qq'/r^2. Sea F el coeficiente de polarización del medio dieléctrico y sea V la función potencial electrostático total que, en el Capítulo indicado, denota la suma ($V + \overline{V}$). Sea Σ la densidad superficial real de la electricidad; ella corresponde a una densidad total, tanto real como ficticia,

$$\Delta = \frac{\Sigma}{1+4\pi\varepsilon F}$$

La función V, constante para cada cuerpo conductor, es armónica en el seno del dieléctrico; evidentemente, es la misma que la función $\dfrac{eV}{1+4\pi\varepsilon F}$.

Por lo tanto, en la superficie de contacto entre un conductor y un dieléctrico,

$$\frac{\delta V}{\delta N_e} = -4\pi\Delta$$

que se puede escribir

$$\frac{\delta}{\delta N_e}\frac{\varepsilon V}{1+4\pi\varepsilon F} = -\frac{4\pi\varepsilon}{\left(1+4\pi\varepsilon F\right)^2}\Sigma$$

Finalmente, la energía electrostática tendrá por valor

$$U = \frac{\varepsilon}{2}\iint \frac{\Delta\Delta'}{r} dSdS'$$

que se puede escribir

$$U = \frac{\varepsilon}{2\left(1+4\pi\varepsilon F\right)^2}\iint \frac{\Sigma\Sigma'}{r} dSdS'$$

Vemos que se puede pasar de las fórmulas de Maxwell a estas si se reemplaza

$$E \quad \text{por} \quad \Sigma$$

$$\Psi \qquad \text{por} \qquad \frac{\varepsilon V}{1+4\pi\varepsilon F}$$

$$\Psi \qquad \text{por} \qquad \frac{\left(1+4\pi\varepsilon F\right)^2}{\varepsilon}$$

La analogía entre las dos teorías es ahora completa.

En el caso en que el sistema contiene un dieléctrico heterogéneo o varios dieléctricos distintos, la analogía entre la teoría de Maxwell y la teoría clásica ya no es tan completa.

Supongamos que los conductores 1 están sumergidos en un medio dieléctrico 0 homogéneo e indefinido y que en este medio hay otro cuerpo dieléctrico, también homogéneo, 2; a los dieléctricos 0 y 2 les corresponden a los valores K_0, K_2 del coeficiente K.

La función Ψ, que es continua en todo el espacio y constante dentro de cada uno de los conductores, satisface la ecuación $\Delta\Psi = 0$ tanto dentro del dieléctrico 0 como el dieléctrico 2.

En la superficie de separación del dieléctrico 0 y el dieléctrico 2, se verifica la relación

$$(a) \qquad K_0 \frac{\delta\Psi}{\delta N_0} + K_1 \frac{\delta\Psi}{\delta N_1} = 0$$

En la superficie de contacto entre el cuerpo 1 y el dieléctrico 0, hay una densidad superficial E_{10} dada por la igualdad

$$(b) \qquad E_{10} = -\frac{K_0}{4\pi}\frac{\delta\Psi}{\delta N_0}$$

y la energía electrostática tendrá por valor

$$(c) \qquad U = \frac{1}{2}\int \Psi E_{10} dS_{10}\ .$$

Comparemos estas relaciones con las que da la teoría clásica.

La función V, continua en todo el espacio y constante dentro de los conductores, es armónica dentro de los dieléctricos.

En la superficie de contacto de los dieléctricos 0 y 2, tenemos

$$(\alpha) \qquad \left(1+4\pi\varepsilon F_0\right)\frac{\delta V}{\delta N_0} + \left(1+4\pi\varepsilon F_2\right)\frac{\delta V}{\delta N_2} = 0$$

En la superficie de contacto entre el conductor 1 y el dieléctrico 0, habrá una densidad superficial real

(β) $$E_{10} = -\frac{1 + 4\pi\varepsilon F_0}{4\pi}\frac{\delta V}{\delta N_0}$$

En la superficie de contacto entre los dos dieléctricos habrá una densidad superficial, puramente ficticia,

(β') $$\Delta_{20} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta V}{\delta N_0} + \frac{\delta V}{\delta N_2}\right)$$

$$= -\frac{\varepsilon(F_2 - F_0)}{1 + 4\pi\varepsilon F_2}\frac{\delta V}{\delta N_0}$$

y, en general, esta densidad no es nula si F_2 no es igual a F_0.

La energía electrostática tendrá por valor

$$U = \frac{\varepsilon}{2}\int V\Delta_{10} dS_{10} + \frac{\varepsilon}{2}\int V\Delta_{20} dS_{20}$$

o

(γ) $$U = \frac{\varepsilon}{2\left(1 + 4\pi\varepsilon F_0\right)}\int V\Sigma_{10} dS_{10} + \frac{\varepsilon}{2}\int V\Delta_{20} dS_{20}$$

¿Podremos pasar del primer grupo de fórmulas al segundo reemplazando E_{10} por Σ_{10} e Ψ por λV, siendo λ una constante convenientemente elegida?

La comparación de las igualdades (*b*) y (β) dará

$$\left(1 + 4\pi\varepsilon F_0\right) = K_0\lambda$$

La comparación de las igualdades (*a*) y (α) dará

$$\frac{1 + 4\pi\varepsilon F_2}{1 + 4\pi\varepsilon F_0} = \frac{K_2}{K_0}$$

y, de una manera general, se tendrá

$$K\lambda = \left(1 + 4\pi\varepsilon F\right)$$

La igualdad (*c*) se convertiría en

$$U = \frac{\lambda}{2}\int V\Sigma_{10} dS_{10} .$$

Si hacemos

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{1 + 4\pi\varepsilon F_0}$$

encontraríamos el primer término de la expresión (γ), pero no el segundo.

Llegamos así a la siguiente conclusión:

Si 0 denota al medio etéreo polarizable donde se supone que todos los cuerpos están sumergidos; si F_0 es el coeficiente de polarización dieléctrica de este medio; si F_2 es el coeficiente de polarización dieléctrica del cuerpo sumergido en este medio; si, finalmente, en las ecuaciones de la tercera electrostática de Maxwell se reemplaza:

La densidad eléctrica E en la superficie de los conductores	por la densidad eléctrica real Σ,
La función Ψ	por la función $\varepsilon V/(1+ 4\pi\varepsilon F_0)$, donde V es la función potencial electrostático,
El coeficiente K_0	por $(1+ 4\pi\varepsilon F_0)^2/\varepsilon$,
El coeficiente K_2	por $[(1+ 4\pi\varepsilon F_0)\,(1+ 4\pi\varepsilon F_0)]/\varepsilon$,
Y la relación K_2/K_0	por $(1+ 4\pi\varepsilon F_2)/\,(1+ 4\pi\varepsilon F_0)$,

encontramos las fórmulas mediante las cuales la electrostática clásica determina el valor de la función potencial en todo el sistema y la distribución real de la electricidad en los conductores, de modo que para estos problemas, las dos electrostáticas brindan soluciones equivalentes.

La equivalencia continúa si uno quiere estudiar las fuerzas ponderomotrices producidas entre conductores electrificados en un sistema que no contiene otro dieléctrico que el medio 0.

Pero si hay otro dieléctrico 2, la transformación previa, aplicada a la energía electrostática de Maxwell, no da la energía electrostática convencional; le falta el término

$$\frac{\varepsilon}{2}\int V\Delta_{20} dS_{20} = -\frac{\varepsilon}{8\pi}\int V\left(\frac{\delta V}{\delta N_0} + \frac{\delta V}{\delta N_2}\right) dS_{20}$$

$$= -\frac{\varepsilon(F_2 - F_0)}{1 + 4\pi\varepsilon F_2}\int V \frac{\delta V}{\delta N_0} dS_{20}$$

que también se podría escribir, en virtud de las equivalencias que acabamos de indicar,

$$-\frac{\varepsilon}{8\pi\lambda^2}\int\Psi\left(\frac{\delta\Psi}{\delta N_0}+\frac{\delta\Psi}{\delta N_2}\right)dS_{20}=-\frac{(1+4\pi\varepsilon F_0)^2}{8\pi\varepsilon}\int\Psi\left(\frac{\delta\Psi}{\delta N_0}+\frac{\delta\Psi}{\delta N_2}\right)dS_{20}$$

$$=-\frac{K_0}{8\pi}\int\Psi\left(\frac{\delta\Psi}{\delta N_0}+\frac{\delta\Psi}{\delta N_2}\right)dS_{20}$$

$$=-\frac{(K_2-K_0)}{8\pi}\int\Psi\frac{\delta\Psi}{\delta N_2}dS_{20}$$

$$=-\frac{(K_2-K_0)}{8\pi}\int_2\left[\left(\frac{\delta\Psi}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta\Psi}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta\Psi}{\delta z}\right)^2\right]d\omega_2$$

Vemos que este término no puede ser cero, si el campo eléctrico no es cero y si el dieléctrico 2 difiere del medio 0.

La presencia o ausencia de este término distinguirá la ley de las fuerzas ponderomotrices que se ejercen en el sistema consideradas de acuerdo con la doctrina clásica o según la doctrina de Maxwell.

Ahora, las investigaciones de M. Gouy ([*]), que son en este punto una continuación natural de la nuestra ([**]), han demostrado que la doctrina clásica explica perfectamente las acciones observadas entre conductores y dieléctricos por varios físicos, especialmente por el Sr. Pellat. Debe concluirse que, en general, estas acciones no concuerdan con la electrostática de Maxwell.

[*] Gouy, *Journal de Physique*, 3[e.] série, t. *V*, p. 154, 1896.

[**] P. Duhem, *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. II, 1892.

CAPÍTULO II.

Las seis ecuaciones de Maxwell y la energía electromagnética.

§1. *Las tres ecuaciones de Maxwell y las componentes de la corriente.*

Supongamos que una corriente eléctrica uniforme corre a través de un cable dispuesto a lo largo del contorno *C* de un área *A*; consideremos a esta área dispuesta de tal manera que veamos el flujo de corriente en la dirección opuesta a las agujas de un reloj; consideremos el *lado positivo* del área *A* (Fig. 1).

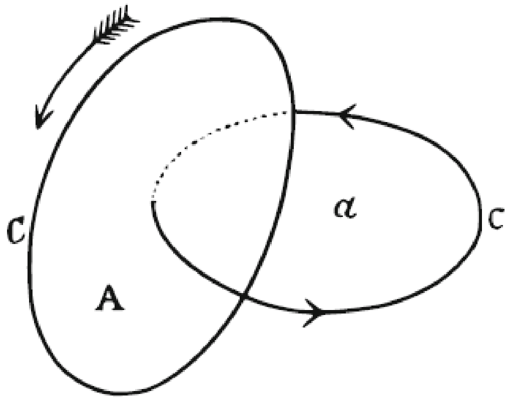


Figura 1. Corriente eléctrica uniforme *C* del área *A* cortada por un polo magnético.

Si un polo magnético, que encierra a la unidad de magnetismo austral, se coloca en presencia de esta corriente, se somete a una fuerza de la cual α, β, γ, son los componentes; esta fuerza es lo que Maxwell llamó *fuerza magnética*, que, de manera más adecuada, ahora se llama *campo magnético*.

Supongamos que este polo unidad describe una curva cerrada *c*, que esta curva perfora el área *A* una vez y sólo una vez, y la atraviesa pasando de la cara negativa a la cara positiva; la fuerza, a la cual el polo está sometido, efectúa un cierto trabajo que representa la integral

$$\int_c (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz)$$

extendido a toda la curva cerrada *c*.

Las leyes del electromagnetismo, establecidas por Biot y Savart, por Laplace, por Ampère y por Savary, dan a conocer las propiedades de las magnitudes α, β, γ. Estas leyes conducen a la siguiente consecuencia:

El trabajo, del que acabamos de dar la expresión, no depende de la forma de la curva *c* ni de la forma de la curva *C*; depende sólo de la intensidad de la corriente que atraviesa la curva *C*; si esta intensidad *J* se mide en unidades electromagnéticas, su valor es $4\pi J$:

$$\int_c (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = 4\pi J \tag{27}$$

Esta igualdad puede interpretarse de manera un poco diferente. Supongamos que la curva *c* es el contorno de un área *a*. Si consideramos el área *a* ubicada de tal posición que nos permite ver que el polo de un imán gira en sentido inverso a las agujas de un reloj, diremos que observamos la *cara positiva* del área *a*.

Está claro que la corriente que pasa a través del cable *C* atraviesa el área *a* pasando del lado negativo al lado positivo; y dado que, a través de cada sección del cable *C*, el cable lleva al tiempo *dt* una cantidad $dQ = Jdt$ de electricidad positiva, podemos decir que el área *a* es atravesada, durante el tiempo *dt* y desde el lado negativo al lado positivo, por una cantidad de electricidad positiva $dQ = Jdt$. Por lo tanto, la igualdad (27) se puede escribir

$$dt\int_c (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = 4\pi dQ \tag{28}$$

Esta igualdad se extiende sin dificultad al caso en que el campo encierra cualquier cantidad de cables atravesados por corrientes cerradas y uniformes. Si una curva cerrada *c*, atraviesa en una dirección definida, el contorno de un área *a* y si *dQ* es la cantidad de electricidad positiva que, en el tiempo *dt* cruza el área *a* desde el lado negativo al lado positivo, la igualdad (28) sigue siendo válida.

La demostración supone que la curva *c* no tiene nada en común con los cables conductores que transportan la electricidad: para superar la igualdad (28) de esta restricción, serían necesarias ciertas precauciones; Sin insistir en ello, Maxwell admitió que la igualdad (28) se extiende incluso al caso en el que la curva cerrada *c* se dibuja dentro de un cuerpo del que sale corriente eléctrica de una manera continua.

En este último caso, la cantidad *dQ* se relaciona, simplemente, con esas corrientes.

Sea $d\sigma$ un elemento del área *a*; *u, v, w* las componentes de la corriente eléctrica en este punto; *N* la normal a este elemento, tomada de tal manera que atraviesa el área *a* desde el lado negativo al lado positivo; en el mismo sentido, y durante el período *dt*, el área $d\sigma$ libera el pasaje a una cantidad de electricidad

$$\left[u\cos(N,x) + v\cos(N,y) + w\cos(N,z)\right] d\sigma dt$$

El área entera tiene una cantidad de electricidad

$$dt\int_a \left[u\,cos(N,x)+v\,cos(N,y)+w\,cos(N,z)\right]d\sigma = dQ$$

La igualdad (28) se transforma en

$$\int(\alpha dx+\beta dy+\gamma dz)-4\pi\int_a \left[u\,cos(N,x)+v\,cos(N,y)+w\,cos(N,z)\right]d\sigma = 0 \qquad (29)$$

Una fórmula utilizada a menudo por Ampère y cuya forma general se debe a Stokes hace posible escribir

$$\int_c(\alpha dx+\beta dy+\gamma dz) = -\int_a \left[\left(\frac{\delta\gamma}{\delta y}-\frac{\delta\beta}{\delta z}\right)cos(N,x)+\left(\frac{\delta\alpha}{\delta z}-\frac{\delta\gamma}{\delta x}\right)cos(N,y)+\left(\frac{\delta\beta}{\delta x}-\frac{\delta\alpha}{\delta y}\right)cos(N,z)\right]d\sigma .$$

La igualdad (29) se puede escribir

$$\int_a \left[\left(\frac{\delta\gamma}{\delta y}-\frac{\delta\beta}{\delta z}+4\pi u\right)cos(N,x)+\left(\frac{\delta\alpha}{\delta z}-\frac{\delta\gamma}{\delta x}+4\pi v\right)cos(N,y)+\left(\frac{\delta\beta}{\delta x}-\frac{\delta\alpha}{\delta y}+4\pi w\right)cos(N,z)\right]d\sigma = 0$$

Esta igualdad debe ser verdadera para toda área *a* trazada en el interior del cuerpo que recorren las corrientes eléctricas. Para esto, se observa sin dificultad, que es necesario y es suficiente que se tenga, en cada punto de este cuerpo, las tres igualdades

$$\begin{cases} \dfrac{\delta\gamma}{\delta y}-\dfrac{\delta\beta}{\delta z} = -4\pi u \\ \dfrac{\delta\alpha}{\delta z}-\dfrac{\delta\gamma}{\delta x} = -4\pi v \\ \dfrac{\delta\beta}{\delta x}-\dfrac{\delta\alpha}{\delta y} = -4\pi w \end{cases} \qquad (30)$$

Estas tres ecuaciones, a las que Maxwell les atribuyó un rol esencial, se encuentran establecidas en su memoria sobre electricidad (*) más antigua, mediante una demostración cuyos matices simples la distinguen de las precedentes; esta demostración él la reproduce (**) o bosqueja (***) en todas sus escritos posteriores.

En su memoria: "*On Faraday's lines of Force*" Maxwell sigue las ecuaciones (30) con la siguiente observación: "Podemos observar que las ecuaciones anteriores dan por diferenciación

* J. Clerk Maxwell: *On Faraday's Lines of Force*, (*Scientific Papers*, Vol. I, p. 194). En realidad, en esa memoria, Maxwell omite el factor 4π; en otras, los signos de los segundos miembros están cambiados, debido a una orientación diferente de los ejes coordenados.

** J. Clerk Maxwell, *On physical Lines of Force* (Scientific Papers, Vol I, p. 462 - *Traité d'Electricité et Magnétisme*, traducción francesa, t. II, p. 285.

*** J. Clerk Maxwell, *A dynamical Theory of the electromagnetic Field*, (*Scientific Papers*, vol. I, p. 557).

$$\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta w}{\delta z}=0,$$

que es la ecuación de continuidad para las corrientes cerradas. Por lo tanto, desde este momento, todas nuestras investigaciones estarán limitadas a las corrientes cerradas; ya que sabemos poco sobre los efectos magnéticos de las corrientes que no son cerradas."

La condición de uniformidad impuesta a las corrientes en las premisas del razonamiento, se refleja en las consecuencias; Maxwell, que en la época en que escribió las líneas precedentes profesaba sobre las corrientes eléctricas, las mismas ideas que todos los físicos, se cuidó muy bien de concluir que todas las corrientes son necesariamente uniformes, sino solamente que la aplicación de las ecuaciones (30) se debe limitar a corrientes uniformes.

La misma observación se presenta en el *Treatise on Electricity and Magnetism*, pero según la doctrina expuesta en ese tratado, ni la corriente de conducción ni la corriente de desplazamiento pueden ser, separadamente, no uniformes. La corriente total, obtenida por la composición de las dos precedentes, es siempre uniforme; las ecuaciones (30); por lo tanto, estarán exentas de cualquier excepción "si consideramos que *u, v, w* son los componentes de la corriente eléctrica total que comprende la variación del desplazamiento eléctrico y la conducción propiamente dicha." En otros términos, en todo caso se podrán escribir las relaciones

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{\delta\gamma}{\delta y}-\dfrac{\delta\beta}{\delta z}=-4\pi\left(u+\bar{u}\right)\\ \dfrac{\delta\alpha}{\delta z}-\dfrac{\delta\gamma}{\delta x}=-4\pi\left(v+\bar{v}\right)\\ \dfrac{\delta\beta}{\delta x}-\dfrac{\delta\alpha}{\delta y}=-4\pi\left(w+\bar{w}\right)\end{cases}$$

§2. *El estado electrotónico y el potencial magnético en la memoria: On Faraday's Lines of Force.*

El grupo de tres ecuaciones que acabamos de estudiar, no constituye todo el electromagnetismo de Maxwell. Él lo completó con una serie de proposiciones esenciales. La forma de esas proposiciones, la serie de deducciones e inducciones que presentan varían de un escrito a otro, por lo que debemos analizar sucesivamente cada una de las memorias sobre electricidad presentadas por el físico escocés. Según su orden cronológico, comenzaremos por la memoria titulada: *On Faraday's Lines of Force*.

En esa memoria, como en los otros escritos anteriores al *Treatise on Electricity and Magnetism*, Maxwell jamás tomó en cuenta las superficies de discontinuidad que puede presentar el sistema; por lo tanto, para seguir su pensamiento, debemos suponer que dos medios distintos siempre están conectados por una *capa de paso* muy fina pero continua; es suficiente que se haga esta observación para que se elimine toda la dificultad de este tema.

No ocurre lo mismo con las dificultades causadas por los errores materiales de cálculo y, especialmente, por las fallas en los signos; que son incesantes en el pasaje que nos proponemos analizar y arrojan cierta incertidumbre sobre el pensamiento del autor.

A los componentes α, β, γ del *campo magnético* que a veces llama *fuerza magnética*, a veces *intensidad magnética* y, a veces, *fuerza de magnetización efectiva*, Maxwell agrega otra magnitud, de componentes *A, B, C* ([*]), que él llama *inducción magnética*; esta palabra que, en escritos más recientes, tomará otro significado, aquí ciertamente designa la magnitud que usualmente se considera, en la teoría del magnetismo, bajo el nombre "*intensidad de magnetización*"; de acuerdo con las ideas de Poisson, uno debe tener [Parte I, igualdad (2)]

(32) $$\frac{\delta A}{\delta x}+\frac{\delta B}{\delta y}+\frac{\delta C}{\delta z}=-\rho\,,$$

Siendo ρ la densidad de la corriente magnética ficticia que Maxwell llama la *materia magnética real* ([**])

Entre las magnitudes *A, B, C,* y los componentes α, β, γ del campo existen las relaciones

(33) $$A=\frac{\alpha}{K}\,,\qquad B=\frac{\beta}{K}\,,\qquad C=\frac{\gamma}{K}\,,$$

donde *K* designa a la *resistencia a la inducción magnética* ([†]); si continuamos comparando la teoría de Maxwell con la teoría de Poisson, reconocemos que esta resistencia es la inversa del *coeficiente de magnetización*.

Sea *V* la función continua, nula en el infinito que define la ecuación

(34) $$\Delta V+4\pi\rho=0\,.$$

Esta función no sería otra cosa que la *función potencial magnético* introducida en la Física por Poisson.

Consideremos las diferencias

[*] Conservaremos aquí las notaciones de Maxwell.

[**] J. Clerk Maxwell, *On Faraday's Lines of Force* (Scientific Papers, Vol. I. p. 192). En realidad, el vez de ρ, Maxwell escribió $4\pi\rho$, en otro lugar, en el pasaje indicado, el signo del segundo miembro de la igualdad (32) está cambiado, pero se encuentra restablecido en la página 201.

[†] J. Clerk Maxwell, *On Faraday's Lines of Force* (Scientific Papers, Vol. I. p. 192).

(35) $$\begin{cases} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{A} - \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi}}\dfrac{\boldsymbol{\delta V}}{\boldsymbol{\delta x}} \\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{B} - \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi}}\dfrac{\boldsymbol{\delta V}}{\boldsymbol{\delta y}} \\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{C} - \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi}}\dfrac{\boldsymbol{\delta V}}{\boldsymbol{\delta z}} \end{cases}$$

Según las igualdades (32) y (34), esas diferencias verifican la relación

(36) $$\frac{\boldsymbol{\delta a}}{\boldsymbol{\delta x}} + \frac{\boldsymbol{\delta b}}{\boldsymbol{\delta y}} + \frac{\boldsymbol{\delta c}}{\boldsymbol{\delta z}} = \mathbf{0}\,.$$

Ahora bien, un teorema del Análisis, utilizado a menudo por Stokes, por Helmholtz y por W. Thomson, enseña que a tres funciones *a, b, c*, unidas por relación (36), siempre se le pueden asociar otras tres funciones *F, G , H,* tales que tengamos

(37) $$\begin{cases} \boldsymbol{a} = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi}}\left(\dfrac{\boldsymbol{\delta H}}{\boldsymbol{\delta y}} - \dfrac{\boldsymbol{\delta G}}{\boldsymbol{\delta z}}\right) \\ \boldsymbol{b} = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi}}\left(\dfrac{\boldsymbol{\delta F}}{\boldsymbol{\delta z}} - \dfrac{\boldsymbol{\delta H}}{\boldsymbol{\delta x}}\right) \\ \boldsymbol{c} = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi}}\left(\dfrac{\boldsymbol{\delta G}}{\boldsymbol{\delta x}} - \dfrac{\boldsymbol{\delta F}}{\boldsymbol{\delta y}}\right) \end{cases}$$

y

(38) $$\frac{\boldsymbol{\delta F}}{\boldsymbol{\delta x}} + \frac{\boldsymbol{\delta G}}{\boldsymbol{\delta y}} + \frac{\boldsymbol{\delta H}}{\boldsymbol{\delta z}} = \mathbf{0}\,.$$

Por lo tanto, las igualdades (35) se pueden escribir

(39) $$\begin{cases} \mathbf{4\pi}\boldsymbol{A} = \dfrac{\boldsymbol{\delta V}}{\boldsymbol{\delta x}} - \left(\dfrac{\boldsymbol{\delta H}}{\boldsymbol{\delta y}} - \dfrac{\boldsymbol{\delta G}}{\boldsymbol{\delta z}}\right) \\ \mathbf{4\pi}\boldsymbol{B} = \dfrac{\boldsymbol{\delta V}}{\boldsymbol{\delta y}} - \left(\dfrac{\boldsymbol{\delta F}}{\boldsymbol{\delta z}} - \dfrac{\boldsymbol{\delta H}}{\boldsymbol{\delta x}}\right). \\ \mathbf{4\pi}\boldsymbol{C} = \dfrac{\boldsymbol{\delta V}}{\boldsymbol{\delta z}} - \left(\dfrac{\boldsymbol{\delta G}}{\boldsymbol{\delta x}} - \dfrac{\boldsymbol{\delta F}}{\boldsymbol{\delta y}}\right) \end{cases}$$

Tomando prestada una denominación que para Faraday significaba una concepción bastante vaga, Maxwell ([*]) da a las cantidades *F, G, H* el nombre de *componentes del estado electrotónico* en el punto (*x, y, z*).

[*] J. Clerk Maxwell, *On Faraday's Lines of Force* (Scientific Papers, Vol. I, p. 203. Las magnitudes *F, G, H* son designadas por α_0, β_0 y γ_0.

¿Cuál será el significado físico atribuido a estas magnitudes? El estudio del potencial electromagnético de un sistema nos lo enseñará.

Volvamos a las ecuaciones (30)

En un sistema en el que no hay corrientes, donde, en consecuencia, *u, v, w* son iguales a cero en todas sus partes, estas ecuaciones nos enseñan que las componentes α, β, γ del campo magnético son las tres derivadas parciales de la misma función; ¿Cuál es esta función? Guiado por la teoría clásica, Maxwell admite (‡) que es la función – *V*, por lo que, en un sistema que contiene imanes y corriente, tenemos

(40) $$\alpha = -\frac{\delta V}{\delta x}, \quad \beta = -\frac{\delta V}{\delta y}, \quad \gamma = -\frac{\delta V}{\delta z}.$$

Cuando un sistema de imanes se mueve, las fuerzas ejercidas en este sistema, de acuerdo con las leyes clásicas que Maxwell admite y que las igualdades previas traducen, hacen algún trabajo; de acuerdo con un conocido teorema, este trabajo es la disminución experimentada por la expresión

$$\frac{1}{2}\int V\rho d\omega$$

donde la integral se extiende a todos los elementos dω del sistema. ¿Por qué Maxwell (**) omite el factor 1/2 y escribe estas líneas: "El trabajo total producido durante cualquier desplazamiento de un sistema magnético es igual a la disminución de la integral

(41) $$E = \int V\rho d\omega$$

extendido a todo el sistema, integral que llamaremos el *potencial total del sistema sobre sí mismo*."¿? No hay ninguna razón para esto, pero es imposible corregir este error y restaurar *E* a su verdadero valor. sin arruinar, por el hecho mismo, toda la deducción que deseamos analizar, así que pasemos con pena sobre este error y continuemos.

En virtud de la igualdad (32), la igualdad (41) se puede escribir

$$E = -\int V\left(\frac{\delta A}{\delta x} + \frac{\delta B}{\delta y} + \frac{\delta C}{\delta z}\right)d\omega$$

o

‡ J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 202. En realidad, en ese párrafo, Maxwell escribió *V*, pero en la página siguiente el restablece el signo exacto.

** J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 203.

$$E = \int \left(A\frac{\delta V}{\delta x} + B\frac{\delta V}{\delta y} + C\frac{\delta V}{\delta z} \right) d\omega$$

Finalmente, (*) en virtud de las igualdades (40)

(42) $$E = -\int (A\alpha + B\beta + C\gamma) d\omega \, .$$

Maxwell admitió (**) que esta expresión de potencial se extiende al caso en que el sistema contiene no solo imanes, sino también corrientes. Luego, haciendo uso de las igualdades (39), se puede escribir la igualdad (42)

(43) $$E = -\frac{1}{4\pi}\int \left(\alpha\frac{\delta V}{\delta x} + \beta\frac{\delta V}{\delta y} + \gamma\frac{\delta V}{\delta z} \right) d\omega + \frac{1}{4\pi}\int \left[\left(\frac{\delta H}{\delta y} - \frac{\delta G}{\delta z} \right)\alpha + \left(\frac{\delta F}{\delta z} - \frac{\delta H}{\delta x} \right)\beta + \left(\frac{\delta G}{\delta x} - \frac{\delta F}{\delta y} \right) \right] d\omega$$

En virtud de las igualdades (40) y (34), encontramos fácilmente

$$\int \left(\alpha\frac{\delta V}{\delta x} + \beta\frac{\delta V}{\delta y} + \gamma\frac{\delta V}{\delta z} \right) d\omega = -\int \left[\left(\frac{\delta V}{\delta x} \right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta y} \right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta z} \right)^2 \right] s\omega$$

$$= \int V\Delta V d\omega = -4\pi \int V\rho d\omega \, .$$

Por otra parte, teniendo en cuenta las igualdades (30), se obtiene

$$\int \left[\left(\frac{\delta H}{\delta y} - \frac{\delta G}{\delta z} \right)\alpha + \left(\frac{\delta F}{\delta z} - \frac{\delta H}{\delta x} \right)\beta + \left(\frac{\delta G}{\delta x} - \frac{\delta F}{\delta y} \right)\gamma \right] d\omega =$$

$$= \int \left[\left(\frac{\delta \gamma}{\delta y} - \frac{\delta \beta}{\delta z} \right) F + \left(\frac{\delta \alpha}{\delta z} - \frac{\delta \gamma}{\delta x} \right) G + \left(\frac{\delta \beta}{\delta x} - \frac{\delta \alpha}{\delta y} \right) H \right] d\omega$$

$$= -4\pi \int (Fu + Gv + Hw) d\omega \, .$$

Por lo tanto, la igualdad (43) se convierte en (*)

(44) $$E = \int V\rho d\omega - \int (Fu + Gv + Hw) d\omega \, .$$

---

* J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 203. Cambió el signo del segundo miembro.
** J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 203.
* J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 203.

Habiendo alcanzado esta fórmula, Maxwell se propuso extraer del principio de la conservación de la energía las leyes de la inducción electromagnética, imitando, como reconoce ([**]), el bien conocido razonamiento de von Helmholtz en su Memoria: *Ueber die Erhaltung der Kraft*.

"Imagine," dice, "que causas externas introducen corrientes al sistema. Estas causas *suministran* trabajo en dos formas.

En primer lugar, ellas superan la resistencia que los conductores que se oponen al paso de la electricidad; si denotamos por E_x, E_y, E_z los componentes del campo eléctrico en un punto, el trabajo provisto para este propósito, durante el tiempo dt, es

$$-dt\int\left(E_x u + E_y v + E_z w\right)d\omega\,.$$

En segundo término, proporcionan trabajo mecánico que pone el sistema en movimiento; el trabajo así suministrado durante el tiempo dt es, por hipótesis, igual al aumento de la cantidad Q durante el mismo tiempo." Sin justificar la omisión del término $\int V\rho d\omega$, Maxwell reduce ([***]) este aumento a

$$-dt\frac{d}{dt}\int\left(Fu + Gv + Hw\right)d\omega$$

o bien, suponiendo que *u, v, w* son invariables

$$-dt\int\left(\frac{dF}{dt}u + \frac{dG}{dt}v + \frac{dH}{dt}w\right)d\omega\,.$$

Si suponemos que las causas externas desaparecen, y que las corrientes son engendradas exclusivamente por la inducción que el sistema ejerce sobre sí mismo, el trabajo proporcionado por estas causas externas debe ser igual a 0, de ahí que la igualdad

$$dt\int\left(\frac{dF}{dt}u + \frac{dG}{dt}v + \frac{dH}{dt}w\right)d\omega + dt\int\left(E_x u + E_y v + E_z w\right)d\omega = 0$$

que aún se puede escribir

$$\int\left[\left(\frac{dF}{dt} + E_x\right)u + \left(\frac{dG}{dt} + E_y\right)v + \left(\frac{dH}{dt} + E_z\right)w\right]d\omega = 0\,. \tag{45}$$

Verificamos esta igualdad (45) si ponemos

[**] J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 204.
[***] J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 204.

(46) $$E_x = -\frac{dF}{dt}, \qquad E_y = -\frac{dG}{dt}, \qquad E_z = -\frac{dH}{dt}.$$

Estas igualdades, de las cuales Maxwell (*) admite su exactitud, conectan las componentes del campo electromotriz de inducción con las componentes del estado electrotónico.

§3. *Examen de la teoría precedente.*

¿Están de acuerdo estas ecuaciones con las conocidas leyes de inducción?

Maxwell no dio una expresión analítica de las funciones *F, G, H,* ni de la función *V* y, en consecuencia, no desarrolló las igualdades (46); pero es fácil compensar su silencio.

La función *V*, según su opinión repetida muchas veces, es la función de potencial magnético y viene dada por la igualdad

(47) $$V(x,y,z) = \int \left(A_1 \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta x_1} + B_1 \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta y_1} + C_1 \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta z_1} \right) d\omega_1$$

En consecuencia, las condiciones impuestas a las funciones *F, G, H* se determinan sin ambigüedad y dan:

(48) $$\begin{cases} F(x,y,z) = \displaystyle\int \left(C_1 \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta y_1} - B_1 \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta z_1} \right) d\omega_1 \\ G(x,y,z) = \displaystyle\int \left(A_1 \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta z_1} - C_1 \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta x_1} \right) d\omega_1 \\ H(x,y,z) = \displaystyle\int \left(B_1 \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta x_1} - A \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta y_1} \right) d\omega_1 \end{cases}$$

Si, en las ecuaciones (46), uno introduce estas expresiones de las funciones *F, G, H,* uno encuentra, para los componentes del campo electromotriz de inducción, expresiones que concuerdan exactamente con las leyes conocidas, en el caso donde la inducción es producida por un cambio de magnetización sin que el sistema experimente algún movimiento. El acuerdo es menos perfecto cuando los imanes y los conductores se desplazan; falta un término que, además, podríamos restaurar fácilmente dejando de tratar a *u, v, w* como invariables y dejando constante sólo la corriente eléctrica de la cual estas tres cantidades son las componentes.

Pero una objeción más seria se opone a la teoría de Maxwell.

* J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 204.

Si esta teoría, aplicada a un sistema en movimiento, denota la existencia de fuerzas electromotrices de inducción, estas fuerzas electromotrices tienen el carácter de cancelarse mutuamente cuando el sistema no contiene un imán; el movimiento de los conductores atravesados por las corrientes sería, por lo tanto, incapaz de generar algún fenómeno de inducción.

Esta consecuencia, por sí sola, es suficiente para rechazar la teoría expuesta por Maxwell en su escrito: *On Faraday's Lines of Force*.

Agreguemos una observación por la cual el lector se sentiría avergonzado al comparar las fórmulas anteriores con las de Maxwell.

En primer lugar, Maxwell, al escribir las igualdades (30), omitió, en el segundo miembro, el factor 4π; este factor 4π, introduce lo contrario al segundo miembro de la igualdad (32) y debemos indicar brevemente cuán ilógica es esta introducción.

Su punto de partida es lo que, en la memoria en cuestión, Maxwell dice de las corrientes eléctricas ([*]).

Si *u*, *v*, *w* son los componentes de una corriente eléctrica en un punto de una superficie cerrada *S*, la cantidad de electricidad que entra en esta superficie durante el tiempo *dt* es

$$dt\int\left[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)\right]dS$$

Una integración por partes transforma esta expresión en

$$-dt\int\left(\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta w}{\delta z}\right)d\omega, \tag{49}$$

La integral se extiende al volumen que limita la superficie cerrada; por un error de signo obvio, Maxwell escribió

$$+dt\int\left(\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta w}{\delta z}\right)d\omega \tag{49bis}$$

Si *e* designa la densidad eléctrica en un punto interior de la superficie *S*, la integral (49) debe ser igual a

$$dt\int\frac{\delta e}{\delta t}d\omega,$$

que da la ecuación de continuidad

[*] J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, pp. 191 - 192.

(50)
$$\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta w}{\delta z}+\frac{\delta e}{\delta t}=0\,.$$

Maxwell no escribe esta ecuación sino que escribe (**)

(51)
$$\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta w}{\delta z}=4\pi\rho$$

sin agregar ninguna explicación, excepto que ρ desaparece en el caso de corrientes uniformes.

Obviamente es posible considerar una cantidad ρ definida por esta igualdad; esta cantidad ρ será igual a $-\frac{1}{4\pi}\frac{\delta e}{\delta t}$. Desafortunadamente, Maxwell parece suponer que la cantidad ρ es precisamente igual a $\frac{\delta e}{\delta t}$ y razonar en consecuencia; es probable que esta suposición lo guíe durante la asimilación que establece (†) entre la conductibilidad eléctrica y la magnetización y lo conduce a conectar los componentes de la inducción magnética con la densidad magnética por la igualdad

(52)
$$\frac{\delta A}{\delta x}+\frac{\delta B}{\delta y}+\frac{\delta C}{\delta z}=4\pi\rho$$

que además, algunas páginas más adelante (††), reemplaza por

(53)
$$\frac{\delta A}{\delta x}+\frac{\delta B}{\delta y}+\frac{\delta C}{\delta z}=-\,4\pi\rho$$

Más adelante, tendremos ocasión de volver a esta igualdad (52). Por el momento, notemos que el uso de las igualdades (30) y (32) en la forma que hemos dado, da fórmulas que a veces difieren de las de Maxwell por la introducción o la supresión de un factor 4π; pero esta modificación no altera, creemos, el espíritu mismo de la teoría.

Sin embargo, hay una última objeción que podría hacerse a la interpretación que hemos dado de esta teoría. Hemos admitido sin discusión que la *inducción magnética* de la que habla Maxwell debe identificarse aquí con la *intensidad de la magnetización* tal como se definió al comienzo de este documento; que, en consecuencia, la *resistencia magnética K* era la inversa del *coeficiente de magnetización k* considerado por Poisson. Esta asimilación requiere ser discutida.

En la superficie que separa un imán de un medio no magnético, la función potencial magnético *V* satisface la relación [Parte I, Capítulo I, igualdad (5)]

** J. Clerk Maxwell, *On Faraday's Lines of Force* (Scientific Papers, Vol. I, p. 192, ecuación C.)
† J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 180.
†† J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 201.

$$\frac{\delta V}{\delta N_i} + \frac{\delta V}{\delta N_e} = 4\pi \left[A\cos(N_i, x) + B\cos(N_i, y) + C\cos(N_i, z) \right]$$

N_i *y* N_e son las direcciones de la normal hacia el interior y el exterior del imán. Si las leyes de la magnetización son las que Poisson ha dado [*Ibid*., Ecuaciones (6)], el segundo miembro de la igualdad anterior se convierte en $-4\pi k\, \delta V/\delta N_i$, de modo que la igualdad anterior se convierte en

(54) $$\frac{\delta V}{\delta N_e} + (1 + 4\pi k)\frac{\delta V}{\delta N_i} = 0$$

Sin embargo, Maxwell indica claramente (*) que la resistencia magnética K es igual a la relación

$$-\frac{\dfrac{\delta V}{\delta N_i}}{\dfrac{\delta V}{\delta N_e}}.$$

Por lo tanto, debemos poner

(55) $$K = \frac{1}{1 + 4\pi k}$$

La cantidad

(56) $$\mu = 1 + 4\pi k$$

que es lo que W. Thomson llamó la *permeabilidad magnética.*

La resistencia eléctrica considerada por Maxwell debe ser tomada como igual al inverso del coeficiente de magnetización de Poisson, o como la inversa de la permeabilidad magnética de W. Thomson.

Los componentes de la *inducción magnética* se obtienen dividiendo los componentes α, β, γ del campo por la resistencia magnética o, lo que resulta lo mismo, multiplicándolos por la permeabilidad magnética. Estas magnitudes estarán dadas por las expresiones

(57) $$A = (1 + 4\pi k)\alpha, \quad B = (1 + 4\pi k)\beta, \quad C = (1 + 4\pi k)\gamma,$$

mientras que las componentes A, B, C de la *imantación* tienen valores

(58) $$A = k\alpha, \quad B = k\beta, \quad C = k\gamma.$$

La inducción magnética y la magnetización no son idénticas; sus componentes están ligados por igualdades

(59) $$\mathsf{A} = \frac{1+4\pi k}{k} A\,, \qquad \mathsf{B} = \frac{1+4\pi k}{k} B\,, \qquad \mathsf{C} = \frac{1+4\pi k}{k} C\,.$$

Entonces, cuando identificamos la *inducción magnética* de Maxwell con la *intensidad de magnetización*, hicimos una seria confusión.

Si lo hemos cometido, es porque nos pareció que se ajustaba al pensamiento de Maxwell, y que la teoría desarrollada nos parecía íntimamente ligada a esta confusión.

Ciertamente, en las memorias que estamos analizando, Maxwell de ninguna manera ha percibido la distinción sobre la que acabamos de insistir; proclama (*) la identidad matemática completa de las fórmulas a las que conduce la teoría clásica de la polaridad magnética y las fórmulas proporcionadas por su teoría de la propagación de la conductividad de las líneas de fuerza magnéticas. Muchas veces, en el curso de su razonamiento, él transporta a la inducción magnética las propiedades conocidas de la magnetización. En particular, el siguiente punto parece muy claro:

La confusión entre la noción de *inducción magnética* y la noción de *intensidad de magnetización* que consideramos en la teoría clásica del magnetismo llevó a Maxwell a establecer una relación entre las variaciones que experimenta la inducción magnética de un punto a otro y la densidad del *material magnético*. En su Tratado de Electricidad y Magnetismo, Maxwell logrará distinguir las dos nociones de intensidad de magnetización e inducción magnética y ya no establecerá ninguna relación entre las derivadas de las componentes de la última y la densidad magnética.

§4.*El estado electrotónico y la energía electromagnética en la memoria: On Physical Lines of Force.*

Nuestra intención no es discutir aquí los problemas de Mecánica planteados por la teoría presentada en la memoria: *On physical Lines of Force*; aceptando como demostradas todas las leyes dinámicas que Maxwell enunció sobre el medio que había imaginado, sólo examinaremos cómo Maxwell transportó estas leyes desde el campo de la Mecánica al dominio de la Electricidad.

El fluido contenido en las células está animado por un movimiento de torbellino. En un instante t, sean en el punto (x, y, z), α, β, γ, las proyecciones sobre los ejes, de un segmento igual a la velocidad de rotación angular y llevadas sobre el eje de rotación del elemento $d\omega$. Además, sea μ una magnitud proporcional a la densidad del fluido que sufre ese movimiento de torbellino. Según Maxwell, un elemento de volumen $d\omega$ del fluido estará sometido a una fuerza de la cual $Xd\omega$, $Yd\omega$, $Zd\omega$ son los componentes; X tiene la siguiente forma (*):

(60) $$X = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta}{\delta x}\mu\alpha + \frac{\delta}{\delta y}\mu\beta + \frac{\delta}{\delta z}\mu\gamma\right)\alpha + \frac{\mu}{8\pi}\frac{\delta\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)}{\delta x} + \frac{\mu\gamma}{4\pi}\left(\frac{\delta\gamma}{\delta x} - \frac{\delta\alpha}{\delta z}\right) + \frac{\mu\beta}{4\pi}\left(\frac{\delta\alpha}{\delta y} - \frac{\delta\beta}{\delta x}\right) - \frac{\delta\Pi}{\delta x}\,.$$

* J. Clerk Maxwell, *On Faraday's Lines of Force.* Scientific Papers, Vol. I, p. 458.

Y y *Z* tienen expresiones análogas.

Dejando de lado el término – $\delta\Pi/\delta x$, donde Π representa una cierta presión, Maxwell se esfuerza por dar una interpretación electromagnética de los otros términos que forman el segundo miembro de la igualdad (60).

El punto de partida para esta interpretación es el siguiente:

Las magnitudes α, β, γ, componentes de la rotación, que figuran, en cada punto, son los componentes del campo magnético.

Por lo tanto, si el elemento $d\omega$ contiene una masa *m* de fluido magnético, debe someterse a una fuerza que tenga los componentes αm, βm, γm. De acuerdo con Maxwell, entre los términos que forman *X*, debemos primero encontrar el término $\alpha\rho$, donde $\rho = m/d\omega$ es la densidad del fluido magnético en el punto considerado, y este término sólo puede ser el primero; Maxwell fue llevado a admitir que la densidad del fluido magnético en un punto está dada por la igualdad

(61) $$\frac{\delta}{\delta x}\mu\alpha + \frac{\delta}{\delta y}\mu\beta + \frac{\delta}{\delta z}\mu\gamma = 4\pi\rho$$

Maxwell, que vuelve a dar el nombre de *componentes de la inducción magnética* a las cantidades $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$, es así llevado a retomar la igualdad (52) que había propuesto y luego abandonado en su memoria anterior.

¿Maxwell busca justificar esta relación, más que la necesidad de encontrar un cierto término para el segundo miembro de la igualdad (60)? En este sentido escribió sólo estas pocas líneas ([*]):

" De ese modo,

$$\left(\frac{\delta}{\delta x}\mu\alpha + \frac{\delta}{\delta y}\mu\beta + \frac{\delta}{\delta z}\mu\gamma\right) d\omega = 4\pi\rho \; d\omega\,,$$

que representa la cantidad total de inducción que atraviesa la superficie del elemento $d\omega$ desde adentro hacia afuera, representa la cantidad contenida en este elemento de la materia magnética imaginaria de un polo sur."

Pero estas líneas van en contra del objeto perseguido por Maxwell, porque llevarían a escribir al segundo miembro $\rho d\omega$, y no a $4\pi\rho d\omega$.

La influencia ejercida en la mente de Maxwell por la extraña igualdad (51), escrita en su memoria anterior, es aquí palpable. Si α, β, γ representan los componentes del campo magnético,

[*] J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 459.

los componentes u, v, w de la corriente eléctrica deben verificar la igualdad (30). Para el segundo miembro de X, tendremos

$$(62) \qquad \frac{\mu\gamma}{4\pi}\left(\frac{\delta\gamma}{\delta x}-\frac{\delta\alpha}{\delta z}\right)-\frac{\mu\beta}{4\pi}\left(\frac{\delta\alpha}{\delta y}-\frac{\delta\beta}{\delta x}\right)=\mu\left(\gamma v-\beta w\right),$$

que representará al componente paralelo a Ox de la acción electromagnética.

Queda por interpretar el término

$$(63) \qquad \frac{\mu}{8\pi}\frac{\delta\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)}{\delta x}$$

Representa el componente paralelo al eje Ox de una fuerza que tiende a arrastrar el elemento $d\omega$ hacia la región del espacio donde el campo tiene el mayor valor absoluto. Faraday (*) ya había demostrado que uno podía considerar a un pequeño cuerpo diamagnético, es decir, un cuerpo para el cual el valor de μ es menor que en el medio ambiente, como dirigido a la región del espacio donde el campo tiene el menor valor absoluto; y W. Thomson había demostrado (**) que un cuerpo pequeño, perfectamente homogéneo era, de alguna manera, atraído por el punto del espacio donde $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ tiene el mayor valor. Maxwell no dudó en ver en el término (63) el componente paralelo al eje Ox de esta atracción.

Pero se puede hacer una objeción seria a esta interpretación.

Cuando un cuerpo perfectamente homogéneo es sometido a inducción magnética, la magnetización que toma puede ser representada por una cierta distribución de fluido magnético; las acciones que sufre pueden descomponerse en fuerzas que solicitarían las diversas masas elementales de este fluido magnético; la atracción aparente ejercida sobre el cuerpo perfectamente homogéneo por el punto donde el campo alcanza su mayor valor absoluto no es una acción distinta de las precedentes y superpuesta a las precedentes; es solo el resultado. Por lo tanto, la interpretación de Maxwell lo hace encontrar dos veces, en el segundo miembro de la igualdad (60), una acción que las leyes reconocidas del magnetismo admiten solo una vez.

Esta dificultad no es la única con la que choca la teoría que estamos exponiendo.

Supongamos (*) que en el sistema no hay corrientes eléctricas; luego se verifican las igualdades,

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

que, de acuerdo con la ecuación (30), se transformarán en

---

* Faraday, *Experimental Researches*, § 2418 (*Philosophical Transactions*, 1846, p. 21).

** W. Thomson, *Philosophical Magazine*, octubre 1850. — *Papers on Electrostatics and Magnetism* p. 647.

* J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 464.

$$\frac{\delta\gamma}{\delta y} - \frac{\delta\beta}{\delta z} = \mathbf{0}, \qquad \frac{\delta\alpha}{\delta z} - \frac{\delta\gamma}{\delta x} = \mathbf{0}, \qquad \frac{\delta\beta}{\delta x} - \frac{\delta\gamma}{\delta y} = \mathbf{0};$$

Las componentes α, β, γ del campo magnético serán las tres derivadas parciales de una misma función;

(64)
$$\alpha = -\frac{\delta V}{\delta x}, \qquad \beta = -\frac{\delta V}{\delta y}, \qquad \gamma = -\frac{\delta V}{\delta z}.$$

La igualdad (61) se convertirá en

(65)
$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\mu\frac{\delta V}{\delta x}\right) + \frac{\delta}{\delta y}\left(\mu\frac{\delta V}{\delta y}\right) + \frac{\delta}{\delta z}\left(\mu\frac{\delta V}{\delta z}\right) = -4\pi\rho$$

y, en una región donde μ no cambia de valor cuando se mueve de un punto al punto vecino,

(66)
$$\Delta V = -4\pi\frac{\rho}{\mu}$$

Imaginemos que μ tiene el mismo valor en todo el espacio; Supongamos que una región 1 de este espacio contiene "materia magnética imaginaria" de modo que ρ difiere de 0, mientras que ρ es cero en todo el resto del espacio; tendremos

(67)
$$V = \frac{1}{\mu}\int \frac{\rho_1}{r} d\omega_1$$

Por lo tanto, el campo magnético se calculará como si dos masas *m*, *m*' ubicadas a la distancia *r*, se repelen entre sí con una fuerza

$$\frac{1}{\mu}\frac{mm'}{r^2}$$

En el vacío donde, por definición, μ = 1, esta fuerza tiene la expresión mm'/r^2 dada por Coulomb, de la cual parece que uno ha encontrado la ley. Sin embargo, no es conveniente apresurarse a afirmar esta conclusión, porque la deducción precedente está subordinada a la hipótesis de que μ tiene el mismo valor dentro de las masas imantadas y el medio interpuesto, una hipótesis inaceptable cuando se trata de masas de hierro colocadas en el aire.

Agreguemos esta observación, que podría desacreditar a la teoría del magnetismo dada por Maxwell. Según la teoría clásica, cualquier imán siempre contiene tanto fluido magnético "boreal" como fluido magnético "austral"; de modo que la carga magnética total que contiene siempre es igual a 0. Esta conclusión ya no está forzada en la teoría de Maxwell; de modo que, de acuerdo con esta teoría, parece posible aislar un imán que contenga sólo fluido boreal o sólo fluido austral.

Las consideraciones anteriores cumplen un papel importante en la determinación de la forma que se debe atribuir a la energía magnética ([*]).

El fluido, animado por movimientos en torbellino que representan el campo magnético, posee una cierta fuerza viva[‡]; esta fuerza viva tiene por valor

$$E = C\int \mu\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)d\omega \tag{68}$$

la integral se extiende a todo el sistema y C es un coeficiente constante cuyo valor debe determinarse.

Para lograr esto, Maxwell supone que el sistema no contiene corriente, en cuyo caso las igualdades (64) son aplicables. La igualdad (68) se convierte en

$$E = C\int \mu\left[\left(\frac{\delta V}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta V}{\delta z}\right)^2\right]d\omega\,.$$

Luego supone que μ tiene el mismo valor en todo el espacio, lo que hace posible transformar la igualdad anterior en

$$E = -C\int \mu V\Delta V d\omega \tag{69}$$

Finalmente, asume que la función V es la suma de dos funciones.

$$V = V_1 + V_2$$

El primer término, V_1, verifica, en cada punto del volumen ω_1, la igualdad

$$\Delta V_1 = -\frac{4\pi\rho_1}{\mu}$$

y, en cualquier otro punto, la igualdad $\Delta V_1 = 0$. El segundo término, V_2, en cada punto de un volumen ω_2 que no tiene puntos en común con ω_1, satisface la igualdad

$$\Delta V_2 = -\frac{4\pi\rho_2}{\mu}$$

[*] J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 472.

[‡] *Fuerza viva*, denota una magnitud física dada por el producto entre la masa y el cuadrado de la velocidad de un cuerpo en movimiento, en símbolos es mv^2, o sea que la fuerza viva de un cuerpo es el doble de su energía cinética. (*N. del T.*)

y, en cualquier otro punto, la igualdad $\Delta V_2 = 0$. Por lo tanto, la igualdad (69) se puede escribir

(70) $$E = 4\pi C \int_{\omega_1} (V_1 + V_2)\rho_1 d\omega_1 + 4\pi C \int_{\omega_2} (V_1 + V_2)\rho_2 d\omega_2$$

Además, el teorema de Green da la igualdad

$$\int V_1 \Delta V_2 d\omega = \int V_2 \Delta V_1 d\omega$$

donde las integrales se extienden a todo el espacio; esta igualdad se convierte fácilmente en la siguiente,

$$\int_{\omega_2} V_1 \rho_2 d\omega_2 = \int_{\omega_1} V_2 \rho_1 d\omega_1$$

que transforman la igualdad (70) en

(71) $$E = 4\pi C \int_{\omega_2} V_1 \rho_1 d\omega_1 + 4\pi C \int_{\omega_1} V_2 \rho_2 d\omega_2 + 8\pi C \int_{\omega_2} V_1 \rho_2 d\omega_2 \,.$$

Supongamos que el volumen ω_1 permanece invariable, así como el valor de ρ_1 que corresponde a cada uno de sus puntos; supongamos que el volumen ω_2 se mueve como un sólido rígido, cada uno de sus puntos resulta en el valor de ρ_2 correspondiente; reconoceremos sin dificultad que $\int_{\omega_2} V_1 \rho_1 d\omega_1, \int_{\omega_1} V_2 \rho_2 d\omega_2$ mantendrán sus valores invariables, mientras que si denotamos por δx_2, δy_2, δz_2, los componentes del desplazamiento de un punto del elemento $d\omega_2$, tendremos

$$\delta \int_{\omega_2} V_1 \rho_2 d\omega_2 = \int_{\omega_2} \rho_2 \left(\frac{\delta V_1}{\delta x_2} \delta x_2 + \frac{\delta V_1}{\delta y_2} \delta y_2 + \frac{\delta V_1}{\delta z_2} \delta z_2 \right) d\omega_2$$

y

(72) $$\delta E = 8\pi C \int_{\omega_2} \rho_2 \left(\frac{\delta V_1}{\delta x_2} \delta x_2 + \frac{\delta V_1}{\delta y_2} \delta y_2 + \frac{\delta V_1}{\delta z_2} \delta z_2 \right) d\omega_2$$

Esta variación de la energía debe ser igual y de signo opuesto al trabajo de las fuerzas *aparentes* que ejerce el imán en ω_1 sobre el imán en ω_2.Teniendo en cuenta el primer término de la expresión de X (60) y de la interpretación que él le da, pero olvidando por completo el segundo término, Maxwell admite que este trabajo tiene valor

$$dT = \int_{\omega_2} \rho_2 (\alpha_1 \delta x_2 + \beta_1 \delta y_2 + \gamma_1 \delta z_2) d\omega_2$$

o bien, en virtud de las igualdades (64)

$$dT = -\int_{\omega_2} \rho_2 \left(\frac{\delta V_1}{\delta x_2} \delta x_2 + \frac{\delta V_1}{\delta y_2} \delta y_2 + \frac{\delta V_1}{\delta z_2} \delta z_2 \right) d\omega_2$$

Al identificar la expresión de – dT con la expresión de δE dada por la igualdad (72), encontramos

$$8\pi C = 1$$

de modo que la igualdad (68) se convierte en

(73)
$$E = \frac{1}{8\pi} \int \mu \left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \right) d\omega .$$

De este modo se obtiene la expresión de la fuerza viva o energía cinética electromagnética; esta expresión cumplirá un papel considerable en los trabajos de Maxwell.

He aquí una aplicación importante ([*])

Imagine un sistema donde α, β, γ varían de un instante a otro. El sistema será atravesado por corrientes eléctricas generadas por inducción. La producción de estas corrientes corresponde a un cierto aumento de la energía del sistema; y Maxwell admite que si E_x, E_y, E_z son las componentes del campo electromotriz, el aumento de energía, dentro del sistema, en el tiempo dt, correspondiente a la creación de las corrientes eléctricas, tiene el valor

$$dt \int \left(E_x u + E_y v + E_z w \right) d\omega .$$

La energía total del sistema, que se supone sustraída a toda acción exterior, debe permanecer invariable, el aumento que acabamos de expresar deberá ser compensado por una disminución de igual magnitud de la fuerza viva electromagnética. Esta disminución tendrá por valor

$$-\frac{dt}{4\pi} \int \mu \left(\alpha \frac{\delta \alpha}{\delta t} + \beta \frac{\delta \beta}{\delta t} + \gamma \frac{\delta \gamma}{\delta t} \right) d\omega$$

y, entonces, se tendrá la igualdad

(74)
$$\left(E_x u + E_y v + E_z w \right) d\omega + \frac{1}{4\pi} \int \mu \left(\alpha \frac{\delta \alpha}{\delta t} + \beta \frac{\delta \beta}{\delta t} + \gamma \frac{\delta \gamma}{\delta t} \right) d\omega = 0$$

Pero, en virtud de las igualdades (30)

[*] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, Vol. I, p. 475.

$$\int\left(E_x u + E_y v + E_z w\right)d\omega = -\frac{1}{4\pi}\int\left[\left(\frac{\delta\gamma}{\delta y}\right)-\left(\frac{\delta\beta}{\delta z}\right)E_x + \left(\frac{\delta\alpha}{\delta z}\right)-\left(\frac{\delta\gamma}{\delta x}\right)E_y + \left(\frac{\delta\beta}{\delta x}\right)-\left(\frac{\delta\alpha}{\delta y}\right)E_z\right]d\omega$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int\left[\left(\frac{\delta E_z}{\delta y}\right)-\left(\frac{\delta E_y}{\delta z}\right)\alpha + \left(\frac{\delta E_x}{\delta z}\right)-\left(\frac{\delta E_z}{\delta x}\right)\beta + \left(\frac{\delta E_y}{\delta x}\right)-\left(\frac{\delta E_x}{\delta y}\right)\gamma\right]d\omega$$

La igualdad (74) se convierte en

$$\int\left[\left(\frac{\delta E_z}{\delta y}-\frac{\delta E_y}{\delta z}-\mu\frac{\delta\alpha}{\delta t}\right)\alpha + \left(\frac{\delta E_x}{\delta z}-\frac{\delta E_z}{\delta x}-\mu\frac{\delta\beta}{\delta t}\right)\beta + \left(\frac{\delta E_y}{\delta x}-\frac{\delta E_x}{\delta y}-\mu\frac{\delta\gamma}{\delta t}\right)\gamma\right]d\omega = 0$$

Obviamente se verificará si en cada punto,

(75)
$$\begin{cases} \dfrac{\delta E_z}{\delta y}-\dfrac{\delta E_y}{\delta z}=\mu\dfrac{\delta\alpha}{\delta t} \\ \dfrac{\delta E_x}{\delta z}-\dfrac{\delta E_z}{\delta x}=\mu\dfrac{\delta\beta}{\delta t} \\ \dfrac{\delta E_y}{\delta x}-\dfrac{\delta E_x}{\delta y}=\mu\dfrac{\delta\gamma}{\delta t}\ . \end{cases}$$

Las tres ecuaciones que acabamos de escribir son de gran importancia; unidas a las tres ecuaciones (30), forman lo que hemos acordado nombrar con Heaviside, Hertz y Cohn, las seis ecuaciones de Maxwell.

Sea Ψ (x, y, z, t) una función, definida como función del tiempo t, que satisface la relación

(76)
$$\Delta\Psi + \frac{\delta E_x}{\delta x} + \frac{\delta E_y}{\delta y} + \frac{\delta E_z}{\delta z} = 0$$

poniendo

(77)
$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\delta\Psi}{\delta x} + E'_x \\ E_y = -\dfrac{\delta\Psi}{\delta x} + E'_y \\ E_z = -\dfrac{\delta\Psi}{\delta z} + E'_z\ . \end{cases}$$

las igualdades (75) y (76) dan

(78)
$$\begin{cases} \dfrac{\delta E'_z}{\delta y} - \dfrac{\delta E'_y}{\delta z} = \mu \dfrac{\delta \alpha}{\delta t} \\ \dfrac{\delta E'_x}{\delta z} - \dfrac{\delta E'_z}{\delta x} = \mu \dfrac{\delta \beta}{\delta t} \\ \dfrac{\delta E'_y}{\delta x} - \dfrac{\delta E'_x}{\delta y} = \mu \dfrac{\delta \gamma}{\delta t} \cdot \end{cases}$$

(79)
$$\frac{\delta E'_x}{\delta x} + \frac{\delta E'_y}{\delta y} + \frac{\delta E'_z}{\delta z} = 0 .$$

Estas ecuaciones, verificadas en todo el espacio, son tratadas por Maxwell de la siguiente manera (*):

Sean *F, G, H* tres funciones que verifican las relaciones en todo el espacio

(80)
$$\begin{cases} \dfrac{\delta H}{\delta y} - \dfrac{\delta G}{\delta z} = -\mu\alpha \\ \dfrac{\delta F}{\delta z} - \dfrac{\delta H}{\delta x} = -\mu\beta \\ \dfrac{\delta G}{\delta x} - \dfrac{\delta F}{\delta y} = -\mu\gamma \end{cases}$$

(81)
$$\frac{\delta F}{\delta x} + \frac{\delta G}{\delta y} + \frac{\delta H}{\delta z} = 0 .$$

Tendremos

$$E'_x = -\frac{\delta F}{\delta t}, \qquad E'_y = -\frac{\delta G}{\delta t}, \qquad E'_z = -\frac{\delta H}{\delta t}$$

y las igualdades (77) darán

(82)
$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\delta \psi}{\delta x} - \dfrac{\delta F}{\delta t}, \\ E_y = -\dfrac{\delta \Psi}{\delta y} - \dfrac{\delta G}{\delta t}, \\ E_z = -\dfrac{\delta \Psi}{\delta z} - \dfrac{\delta H}{\delta t}. \end{cases}$$

Las funciones *F, G, H* que figuran en estas fórmulas son las componentes del *estado electrotónico* ya considerado por Maxwell en su memoria: *On Faraday's Lines of Force*. En cuando

* En realidad, en el párrafo que analizamos, Maxwell escribió –*F*, –*G*, –*H*, las magnitudes que nosotros analizamos aquí. El cambio de signo que hemos introducido restablece la concordancia entre los diversos escritos de Mawell.

a Ψ (*) "es una función de *x, y, z, t*, que es indeterminada en lo que concierne a la solución de ecuaciones primitivas, pero que, ciertamente, puede determinarse en cada caso particular por las circunstancias del problema. La función Ψ puede interpretarse físicamente como la *tensión eléctrica* en cada punto del espacio."

En un sistema donde se ha establecido un régimen permanente, *F*, *G*, *H*, no dependen ya del tiempo y las igualdades (82) se reducen a

$$E_x = -\frac{\delta\psi}{\delta x}, \quad E_y = -\frac{\delta\Psi}{\delta y}, \quad E_z = -\frac{\delta\Psi}{\delta z}. \tag{83}$$

Los componentes del campo electromotriz son respectivamente iguales a las tres derivadas parciales de una función donde la forma analítica permanece absolutamente desconocida. Este es uno de los fundamentos de la segunda electrostática de Maxwell (**).

Al exponer este cálculo, Maxwell observa con toda razón (***) que las ecuaciones (80) solo se pueden escribir si tenemos en todos los aspectos.

$$\frac{\delta}{\delta x}\mu\alpha + \frac{\delta}{\delta y}\mu\beta + \frac{\delta}{\delta z}\mu\gamma = 0 \tag{84}$$

Al compararla con la ecuación (61) esta última igualdad nos muestra que

$$\rho = 0$$

Las ecuaciones (80) solo pueden escribirse si el *fluido magnético ficticio tiene densidad cero en todas las partes*. La teoría del estado electrotónico desarrollada aquí por Maxwell es incompatible con la existencia del magnetismo; es una restricción que Maxwell olvidó en su memoria: *A dynamical theory of the electromagnetic field*.

§5. *El estado electrotónico y la energía electromagnética en la memoria. A dynamical theory of the electromagnetic field*.

En el artículo titulado *On Physical Lines of Force*, Maxwell se esforzó por crear un ensamblaje mecánico cuyas propiedades pudieran considerarse como la explicación de los fenómenos eléctricos. En sus últimos escritos, aunque continuó admitiendo que las acciones eléctricas y magnéticas son de esencia mecánica, ya no buscó construir el mecanismo que las produce; de acuerdo con la cita de Pascal, "continuó diciendo bruscamente: se hace por figura y movimiento";

[*] En el estudio de la inducción en un sistema inmóvil, Maxwell olvidó los términos en –δΨ/δ*x*, –δΨ/δ*y*, –δΨ/δz; pero los restableció en las fórmulas relativas a la inducción en el seno de un sistema en movimiento.
[**] Ver Primera parte, Capítulo III.
[***] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, Vol. I, p. 476, igualdad (57)

pero ya no intentó "decir qué es y cómo se compone la máquina."‡ Formar la expresión de la energía electrostática y de la energía electromagnética; mostrar que estas expresiones se pueden relacionar con las leyes de los fenómenos eléctricos, imitando el método de Lagrange, que deriva las ecuaciones del movimiento de un sistema de las expresiones de la energía potencial y la energía cinética del sistema; tales son los objetivos de la memoria: *A dynamical theory of the electromagnetic field* y del *Treatise on Electricity and Magnetism*.

La tercera parte de la memoria: *A dynamical theory of the electromagnetic field*, que es aquí de particular interés para nosotros, ofrece, en una forma extremadamente concisa, el conjunto de las principales fórmulas que rigen los fenómenos eléctricos.

Una de las magnitudes que Maxwell introduce primero es el *momento electromagnético* (*); este vector del cual él denota a sus componentes por *F, G, H*, cumple exactamente el papel que, en sus memorias previas, atribuyó al *estado electrotónico*; admite desde el principio, de hecho, que los componentes E'_x, E'_y, E'_z del campo electromotriz de inducción, en un sistema inmóvil, están dados por las igualdades

$$E'_x = -\frac{\delta F}{\delta t}, \qquad E'_y = -\frac{\delta G}{\delta t}, \qquad E'_z = -\frac{\delta H}{\delta t}$$

De estas magnitudes *F*, *G*, *H*, Maxwell no dio ninguna expresión analítica; pero las vinculó a los componentes α, β, γ del campo magnético. Designando por $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$ a las componentes de la *inducción magnética*, escribió las tres relaciones (**)

(80bis)
$$\begin{cases} \dfrac{\delta H}{\delta y} - \dfrac{\delta G}{\delta z} = -\mu\alpha \\ \dfrac{\delta F}{\delta z} - \dfrac{\delta H}{\delta x} = -\mu\beta \\ \dfrac{\delta G}{\delta x} - \dfrac{\delta F}{\delta y} = -\mu\gamma \end{cases}$$

Estas igualdades, que se verifican en todo el espacio, son exactamente las mismas que las igualdades (80). Pero a las igualdades (80) se le unió la relación

(81)
$$\frac{\delta F}{\delta x} + \frac{\delta G}{\delta y} + \frac{\delta H}{\delta z} = 0$$

de modo que se las funciones *F, G, H*; están determinadas; pero en la memoria que estamos analizando ahora, Maxwell ya no admite la exactitud de la igualdad (81); por el contrario, escribió (*)

‡ Blaise Pascal, en sus "*Raisons des Effets*" refiriéndose al mecanicismo de Descartes, que no podía explicar el funcionamiento del cuerpo humano, imagina que Descartes diría "*cela se fait par figure et mouvement*" (*N. del T*).

* J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, Vol. I, p. 555.

** J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 556.

(81bis) $$\frac{\delta F}{\delta x}+\frac{\delta G}{\delta y}+\frac{\delta H}{\delta z}=J$$

y trata a la magnitud *J* como una cantidad desconocida, generalmente distinta de cero.

Desde entonces, las cantidades *F ,G, H* ya no son determinadas; podríamos agregar, respectivamente, las tres derivadas con respecto a *x, y, z* de una función arbitraria de las variables *x, y, z, t*.

Cuando Maxwell escribió ([**]) los componentes del campo electromotriz dentro de un sistema inmóvil

(82bis) $$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\delta\psi}{\delta x}-\dfrac{\delta F}{\delta t}, \\ E_y = -\dfrac{\delta\Psi}{\delta y}-\dfrac{\delta G}{\delta t}, \\ E_z = -\dfrac{\delta\Psi}{\delta z}-\dfrac{\delta H}{\delta t}. \end{cases}$$

estimó que podía, en cualquier circunstancia, sustituir a Ψ con cualquier función de *x, y, z, t*. La función Ψ es absolutamente indeterminada y no se puede adherir lógicamente a la siguiente afirmación ([***]): "La función Ψ es una función de *x, y, z, t*, que es indeterminada con respecto a la solución de las ecuaciones precedentes, ya que los términos que dependen de ella desaparecen en una integración extendida a un circuito cerrado, pero la cantidad y puede determinarse siempre, en cada caso particular, cuando se conocen las condiciones presentes de la cuestión. Y debe interpretarse físicamente como representando el *potencial eléctrico* en cada punto del espacio."

Además, cuando Maxwell, en su memoria: *On Physical Lines of Force*, escribió las ecuaciones (80), tuvo cuidado de remarcar que serían absurdas si no tuviéramos, en todo el espacio, la igualdad

(84) $$\frac{\delta}{\delta x}\mu\alpha+\frac{\delta}{\delta y}\mu\beta+\frac{\delta}{\delta z}\mu\gamma=0$$

En esta memoria, descuida hacer esta observación y, además, razona como si la igualdad (84) fuera falsa; veremos un ejemplo de eso ahora.

Siguiendo las consideraciones ([*]) que su extrema brevedad apenas nos permite considerar como un razonamiento, Maxwell admite ([**]) que la energía electromagnética viene dada por la fórmula

[**] J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 558 y p. 578.
[***] J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 558.
[*] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, Vol. I, p. 541.
[**] J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 562.

(85) $$E = \frac{1}{2}\int \left(Fu + Gv + Hw\right) d\omega$$

donde *u, v, w* representan las componentes del flujo total y donde la integral se extiende a todo el espacio.

Permítanos aclarar las consideraciones que llevaron a Maxwell a esta expresión.

En el tiempo *dt*, el sistema libera, de acuerdo con la ley de Joule, una cantidad de calor dada en unidades mecánicas por la expresión

$$dt \int r\left(u^2 + v^2 + w^2\right) d\omega\,,$$

donde *r* es la resistencia específica del medio; en virtud de la ley de Ohm, esta cantidad se puede escribir

$$dt \int \left(E_x u + E_y v + E_z w\right) d\omega\,.$$

Si el sistema, aislado e inmóvil, está sometido exclusivamente a las acciones electromotrices que, por inducción, producen las variaciones del flujo eléctrico, la cantidad de calor liberado en un tiempo *dt* es exactamente igual a la disminución de la energía electromagnética durante el mismo tiempo. Por lo tanto tenemos igualdad

$$dE + dt \int \left(E_x u + E_y v + E_z w\right) d\omega = 0\,.$$

Al mismo tiempo, las componentes E_x, .E_y, E_z del campo del electromotriz están dadas por las igualdades (82bis), de modo que la igualdad anterior se vuelve

$$dE - dt \int \left(\frac{\delta\Psi}{\delta x}u + \frac{\delta\Psi}{\delta y}v + \frac{\delta\Psi}{\delta z}w\right) d\omega - dt \int \left(\frac{\delta F}{\delta x}u + \frac{\delta G}{\delta y}v + \frac{\delta H}{\delta z}w\right) d\omega = 0\,.$$

El término

$$-\int \left(\frac{\delta\Psi}{\delta x}u + \frac{\delta\Psi}{\delta y}v + \frac{\delta\Psi}{\delta z}w\right) d\omega$$

se puede escribir

$$-\int \psi \left(\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z}\right) d\omega\,.$$

es, por lo tanto, igual a 0, si sólo consideramos corrientes uniformes, para las cuales

$$\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta w}{\delta z}=0\,.$$

En este caso tendremos

$$dE=dt\int\left(\frac{\delta F}{\delta t}u+\frac{\delta G}{\delta t}v+\frac{\delta H}{\delta t}w\right)d\omega\,.$$

¿Es esta igualdad compatible con la expresión de *E* provista por la igualdad (85)? La igualdad da esto

$$dE=\frac{1}{2}dt\int\left(\frac{\delta F}{\delta t}u+\frac{\delta G}{\delta t}v+\frac{\delta H}{\delta t}w\right)d\omega+\frac{1}{2}dt\int\left(F\frac{\delta u}{\delta t}+G\frac{\delta v}{\delta t}+H\frac{\delta w}{\delta t}\right)d\omega\,.$$

Para que esta igualdad sea compatible con la igualdad (86), es necesario y suficiente que tengamos la igualdad

$$\int\left(\frac{\delta F}{\delta t}u+\frac{\delta G}{\delta t}v+\frac{\delta H}{\delta t}w\right)d\omega=\int\left(F\frac{\delta u}{\delta t}+G\frac{\delta v}{\delta t}+H\frac{\delta w}{\delta t}\right)d\omega\,.$$

¿Se verifica esta igualdad? No es posible decidir, porque en el artículo que estamos analizando, Maxwell no asignó una expresión analítica definida a las funciones *F, G, H*.

Aceptemos la igualdad (85). Las igualdades (30) le darán la forma

$$E=-\frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\delta\gamma}{\delta y}-\frac{\delta\beta}{\delta z}\right)F+\left(\frac{\delta\alpha}{\delta z}-\frac{\delta\gamma}{\delta x}\right)G+\left(\frac{\delta\beta}{\delta x}-\frac{\delta\alpha}{\delta y}\right)H\right]d\omega$$

que, mediante una integración por partes cambiará a

$$E=-\frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\delta H}{\delta y}-\frac{\delta G}{\delta z}\right)\alpha+\left(\frac{\delta F}{\delta z}-\frac{\delta H}{\delta x}\right)\beta+\left(\frac{\delta G}{\delta x}-\frac{\delta F}{\delta y}\right)\gamma\right]d\omega\,.$$

Las igualdades (80bis) darán entonces

(73) $$E=\frac{1}{8\pi}\int\mu\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)d\omega\,.$$

La energía electromagnética, determinada en la memoria *A dynamical Theory of the electromagnetic Field*, por consideraciones eléctricas, resume así la forma que, en la memoria, *On physical Lines of Force*, le había atribuido hipótesis mecánicas.

Es más difícil establecer el acuerdo entre estas formas de energía electromagnética y aquella a lo que Maxwell fue llevado, en su memoria: *On Faraday's Lines of Force*, a partir de la teoría del magnetismo.

Esta última forma viene dada por la igualdad

$$E = \int V\rho d\omega - \int (Fu + Gv + Hw)\, d\omega \tag{44}$$

La densidad magnética ρ está relacionada con los componentes de la inducción magnética por la igualdad (61)

$$\frac{\delta}{\delta x}\mu\alpha + \frac{\delta}{\delta y}\mu\beta + \frac{\delta}{\delta z}\mu\gamma = 4\pi\rho$$

o bien, de acuerdo con la ecuación (80bis)

$$\rho = 0$$

Por lo tanto, la igualdad (44) se reduce a

$$E = -\int (Fu + Gv + Hw)\, d\omega\,. \tag{88}$$

Esta expresión de la energía electromagnética difiere de la expresión (85) tanto por la presencia del signo – como por la ausencia del factor $^1/_2$. De hecho, como señalamos en el § 2, la ausencia del factor $^1/_2$ proviene de una omisión, y este factor podría restaurarse fácilmente. Pero la contradicción que la naturaleza del signo introduce, entre las dos expresiones de la energía electromagnética, no puede evitarse.

La contradicción desaparecería si, en la definición de la densidad magnética, dada por la igualdad (32), el signo de ρ cambiase; este cambio de signo, Maxwell lo hizo accidentalmente en la memoria: *On Faraday's Lines of Force*, pero el signo – lo expresó normalmente en sus memorias posteriores.

¿La expresión (73) de la energía electromagnética está de acuerdo con las leyes conocidas del magnetismo? Ya sea que en el sistema circulen corrientes o no, Maxwell admite que existe una función Φ ([*]) que él llama *potencial magnético*, tal que se tiene

$$\alpha = -\frac{\delta\Phi}{\delta x}, \quad \beta = -\frac{\delta\Phi}{\delta y}, \quad \gamma = -\frac{\delta\Phi}{\delta z}. \tag{89}$$

La expresión (73) se convierte en

[*] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, Vol. I, p. 566. En realidad, designo el *potencial magnético* mediante – Φ.

$$E = -\frac{1}{8\pi}\int\left(\mu\alpha\frac{\delta\Phi}{\delta x} + \mu\beta\frac{\delta\Phi}{\delta y} + \mu\gamma\frac{\delta\Phi}{\delta z}\right)d\omega$$

o, mediante una integración por partes

(90) $$E = \frac{1}{8\pi}\int\phi\left(\frac{\delta}{\delta x}\mu\alpha + \frac{\delta}{\delta y}\mu\beta + \frac{\delta}{\delta z}\mu\gamma\right)d\omega.$$

Sin avanzar en el cálculo, Maxwell debería haber notado que las igualdades (80bis) dan inmediatamente

(84) $$\frac{\delta}{\delta x}\mu\alpha + \frac{\delta}{\delta y}\mu\beta + \frac{\delta}{\delta z}\mu\gamma = 0$$

que transforma a la igualdad (90) en

$$E = 0$$

Por lo tanto, la energía electromagnética sería igualmente cero en todas las circunstancias; tal consecuencia le habría revelado que no podía, al mismo tiempo, aceptar las igualdades (80bis) y las igualdades (89). Maxwell no se molestó por tal contradicción e introdujo en sus cálculos la cantidad ρ definida por la igualdad

(61) $$\frac{\delta}{\delta x}\mu\alpha + \frac{\delta}{\delta y}\mu\beta + \frac{\delta}{\delta z}\mu\gamma = 4\pi\rho$$

Maxwell trató a esta cantidad ρ como si no fuera siempre cero y reemplazó la igualdad (90) por la igualdad

(91) $$E = \frac{1}{2}\int\Phi\ \rho\, d\omega\,.$$

A partir de esta expresión, por un razonamiento del que ya hemos visto varios ejemplos, Maxwell se propuso extraer la ley de las acciones que se ejercen entre los dos polos de un imán.

Para lograr esto, Maxwell supuso *implícitamente* que μ tiene el mismo valor en todo el espacio; que la función Φ es la suma de dos funciones V_1, V_2, que son respectivamente las funciones potenciales de dos masas magnéticas 1 y 2. En todo el espacio, la función V_1 satisface la ecuación

$$\Delta V_1 = 0\,,$$

salvo en el interior del cuerpo 1, donde satisface la ecuación

$$\Delta V_1 = -\frac{4\pi\rho_1}{\mu}.$$

La función V_2 satisface, en todos los puntos del espacio, la ecuación

$$\Delta V_2 = 0,$$

salvo en el interior del cuerpo 2, donde satisface la ecuación

$$\Delta V_2 = -\frac{4\pi\rho_2}{\mu}.$$

La energía magnética E se puede escribir

$$E = -\frac{1}{8\pi}\int (V_1 + V_2)(\Delta V_1 + \Delta V_2)\, d\omega$$

y, de acuerdo con el teorema de Green

$$\int V_1 \Delta V_2 d\omega = \int V_2 \Delta V_1 d\omega$$

uno puede escribir

$$E = -\frac{\mu}{8\pi}\int V_1 \Delta V_1 d\omega - \frac{\mu}{8\pi}\int V_2 \Delta V_2 d\omega - \frac{\mu}{4\pi}\int V_1 \Delta V_2 d\omega$$

o bien, en virtud de las propiedades de la función V_2

$$E = -\frac{\mu}{8\pi}\left(\int V_1 \Delta V_1 d\omega + \int V_2 \Delta V_2 d\omega\right) + \int V_1 \rho_2 d\omega.$$

Supongamos que el imán 1 permanece invariable en magnetización y posición y que el imán 2 se mueve como un sólido rígido que sufre una magnetización; también podemos decir que lleva consigo su función potencial V_2. Ambas integrales

$$\int V_1 \Delta V_1 d\omega, \qquad \int V_2 \Delta V_2 d\omega,$$

extendidas a todo el espacio, obviamente mantendrán valores invariables. Si denotamos por dx_2, dy_2, dz_2 las componentes del desplazamiento de un punto del elemento $d\omega_2$ que pertenece al cuerpo 2, tendremos

$$dE = \int_2 \rho_2 \left(\frac{\delta V_1}{\delta x_2}\delta x_2 + \frac{\delta V_1}{\delta y_2}\delta y_2 + \frac{\delta V_1}{\delta z_2}\delta z_2\right) d\omega_2.$$

dE también es igual al trabajo interno, cambiado de signo, realizado en la modificación considerada. Entonces todo sucede como si sobre cada elemento $d\omega_2$ del cuerpo 2, el cuerpo 1 ejerciera una fuerza que tuviera por componentes

$$X = -\rho_2 \frac{\delta V_1}{\delta x_2} \delta\omega_2, \qquad Y = -\rho_2 \frac{\delta V_1}{\delta y_2} \delta\omega_2, \qquad Z = -\rho_2 \frac{\delta V_1}{\delta z_2} \delta\omega_2 .$$

Además, los caracteres analíticos atribuidos a la función V_1 requieren que tengamos

$$V_1 = \frac{1}{\mu} \int \frac{\rho_1}{r} d\omega_1 .$$

Las componentes de la fuerza ejercida por el imán 1 sobre un elemento $d\omega_2$ del imán 2, son

$$X = -\frac{1}{\mu} \rho_2 d\omega_2 \frac{\delta}{\delta x_2} \int \frac{\rho_1}{r} d\omega_1 ,$$

$$Y = -\frac{1}{\mu} \rho_2 d\omega_2 \frac{\delta}{\delta y_2} \int \frac{\rho_1}{r} d\omega_1 ,$$

$$Z = -\frac{1}{\mu} \rho_2 d\omega_2 \frac{\delta}{\delta z_2} \int \frac{\rho_1}{r} d\omega_1 .$$

Ellas son las mismas que si dos masas magnéticas $m_1 = \rho_1 d\omega_1$ y $m_2 = \rho_2 d\omega_2$, separadas por una distancia r, se repelieran con una fuerza

$$\frac{1}{\mu} \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Esta proposición parece estar de acuerdo con las leyes conocidas del magnetismo; en realidad, es necesario reproducir aquí la observación que ya hemos hecho: la teoría anterior está íntimamente ligada a una hipótesis inadmisible; supone que el coeficiente μ tiene el mismo valor para todos los cuerpos, tanto para los imanes como para el medio, como el aire en el que están sumergidos.

§ 6. *La teoría del Magnetismo en el Treatise on Electricity and Magnetism.*

"En este tratado", dice Maxwell ([*]), "propongo describir lo más importante de estos fenómenos (eléctricos y magnéticos), para mostrar cómo se pueden someter a medición y para tratar de encontrar las relaciones matemáticas existentes entre las cantidades medidas. Habiendo obtenido así los datos de una teoría matemática del electromagnetismo y haber demostrado cómo esta teoría se

[*] J. Clerk Maxwell, *Traité d'Electricité et de Magnétisme*, traducción francesa, Prefacio de la 1ª edición t.I, p. 9.

puede aplicar al cálculo de los fenómenos: me esforzaré por sacar a la luz, tan claramente como me sea posible, las relaciones existentes entre las formas matemáticas de esta teoría y las de la ciencia fundamental de la Dinámica; de esta forma, estaremos, hasta cierto punto, preparados para definir la naturaleza de los fenómenos dinámicos entre los cuales debemos buscar analogías o explicaciones de los fenómenos electromagnéticos."

Estando el objeto del trabajo tan claramente determinado, el siguiente problema debe cumplir un papel esencial:

Dadas las leyes básicas de la electricidad y el magnetismo, que trazan las expresiones de la energía electrostática y de la energía electromagnética, demostrar que estas dos energías, en la forma en que se encuentran en la memoria: *On Physical lines of Force* atribuyen a la energía potencial y a la fuerza viva del medio las deformaciones mecánicas que imitan o explican los fenómenos electromagnéticos.

Como ya hemos visto la relación con la energía electrostática, en una parte de este programa, ([‡]), examinemos ahora la determinación de la energía electromagnética. Maxwell logró expresar esta energía por dos métodos diferentes; uno de estos métodos usa las leyes del electromagnetismo, mientras que el otro, restringido a sistemas que no contienen corrientes, se basa exclusivamente en la teoría del magnetismo.

El *Treatise on Electricity and Magnetism*, de hecho, expone una teoría completa del magnetismo. Esta teoría forma la tercera parte del trabajo.

La teoría del magnetismo expuesta por Maxwell es la teoría clásica creada por los trabajos de Poisson, F. E. Neumann, G. Kirchhoff, W. Thomson, de cuya teoría hemos resumido previamente ([**]) las proposiciones esenciales. En particular, él consideró la *intensidad de la magnetización*, definida como lo hicimos en el pasaje citado.

Los componentes *A, B, C* de esta intensidad de magnetización le sirvieron a Maxwell, como a Poisson ([***]), para definir la *función del potencial magnético* mediante la fórmula

(92)
$$V = \int \left(A_1 \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta x_1} + B_1 \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta y_1} + C_1 \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta z_1} \right) d\omega_1 .$$

Para esta función, los componentes α, β, γ del campo están vinculados por las relaciones

(93)
$$\alpha = -\frac{\delta V}{\delta x}, \qquad \beta = -\frac{\delta V}{\delta y}, \qquad \gamma = -\frac{\delta V}{\delta z}.$$

[‡] Primera parte, Capítulo IV, § 2.

[**] Primera parte, Capítulo I, § 1.

[***] Primera parte, igualdad (1). J. Clerk Maxwell, *Traité d'Electricité et de Magnétisme*, traducción francesa, t. II, p. 10, igualdad (8).

Esta función potencial se puede expresar también por medio de las dos densidades, sólidas y superficiales, ρ y σ, del fluido magnético ficticio por la igualdad

$$V = \int \frac{\rho_1}{r} d\omega_1 + \int \frac{\sigma_1}{r} dS_1$$

y estas densidades están relacionadas con los componentes de la magnetización por las igualdades (*)

(94) $$\frac{\delta A}{\delta x} + \frac{\delta B}{\delta y} + \frac{\delta C}{\delta z} = -\rho$$

(95) $$A\cos(N_i, x) + B\cos(N_i, y) + C\cos(N_i, z) = -\sigma\,,$$

ya dadas por Poisson.

Además de la intensidad de la magnetización, pero sin confundirla, como parece haber hecho en sus primeras obras, Maxwell considera (**) la *inducción magnética*. Los componentes **A**, **B**, **C** de esta magnitud se definen por las igualdades

(96) $$\begin{cases} \mathsf{A} = \alpha + 4\pi A, \\ \mathsf{B} = \beta + 4\pi B, \\ \mathsf{C} = \gamma + 4\pi C. \end{cases}$$

que las igualdades (93) también permiten escribir

(97) $$\begin{cases} \mathsf{A} = 4\pi A - \dfrac{\delta V}{\delta x} \\ \mathsf{B} = 4\pi B - \dfrac{\delta V}{\delta y} \\ \mathsf{C} = 4\pi C - \dfrac{\delta V}{\delta z} \end{cases}$$

Al restituir su sentido magnético a la inducción magnética, Maxwell abandona la relación que, bajo dos formas incompatibles diferentes, quería establecer entre los componentes de la inducción magnética y la densidad del material magnético ficticio. Con esto, niega implícitamente todo el razonamiento, tan esencial en sus escritos anteriores, que invocó para esta relación.

En cada punto de un medio continuo, tenemos (†)

[*] Primera parte, igualdades (2) y (3). J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p.11.
[**] J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, nº 400, p.28.
[†] Primera parte, igualdad (4).

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 V}{\delta z^2}=4\pi\left(\frac{\delta A}{\delta x}+\frac{\delta B}{\delta y}+\frac{\delta C}{\delta z}\right).$$

En virtud de las ecuaciones (97), esta igualdad se convierte en (††)

(98) $$\frac{\delta \mathsf{A}}{\delta x}+\frac{\delta \mathsf{B}}{\delta y}+\frac{\delta \mathsf{C}}{\delta z}=0.$$

A partir de esta última igualdad, se deduce que podemos encontrar tres funciones *F, G, H*, como las que tenemos

(99) $$\begin{cases}\dfrac{\delta H}{\delta y}-\dfrac{\delta G}{\delta z}=-\mathsf{A}\\[2mm] \dfrac{\delta F}{\delta z}-\dfrac{\delta H}{\delta x}=-\mathsf{B}\\[2mm] \dfrac{\delta G}{\delta x}-\dfrac{\delta F}{\delta y}=-\mathsf{C}\end{cases}$$

Maxwell escribe estas ecuaciones (†††) y a esta magnitud le da el nombre de *vector potencial de la inducción magnética*, de la cual *F, G, H* son los componentes. Sobre este tema, debemos repetir la observación que ya hemos hecho sobre las igualdades (80bis): las igualdades (99) no son suficientes para determinar las funciones *F, G, H,* ya que siempre dejamos indeterminado el valor de la suma

$$\frac{\delta F}{\delta x}+\frac{\delta G}{\delta y}+\frac{\delta H}{\delta z}.$$

En un cuerpo perfectamente liso donde la función de magnetización se reduce a un coeficiente *k* independiente de la intensidad de magnetización, tenemos

(100) $$A=k\alpha,\qquad B=k\beta,\qquad C=k\gamma$$

y las igualdades 96, se pueden expresar

$$\mathsf{A}=\frac{1+4\pi k}{k}A,$$

$$\mathsf{B}=\frac{1+4\pi k}{k}B,$$

†† J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 57, igualdad (17)

††† J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, nº 405, p. 32, En el *Treatise* de Maxwell, los signos de los segundos miembros están cambiados debido a una elección diferente de los ejes coordenados.

$$\mathsf{C} = \frac{1+4\pi k}{k} C \,.$$

Entre los componentes de la magnetización y los componentes de la inducción magnética, encontramos las relaciones (59).

Si hacemos

(101) $$\mu = 1 + 4\pi k$$

Las ecuaciones (96) y (100) dan (*)

(102) $$\mathsf{A} = \mu\alpha\,, \qquad \mathsf{B} = \mu\beta\,, \qquad \mathsf{C} = \mu\gamma\,,$$

que, en los escritos anteriores de Maxwell, sirvieron para definir la inducción magnética.

Vayamos a la determinación de la energía magnética.

Un imán 1, situado en un punto (x_1, y_1, z_1) de un elemento $d\omega$, está en presencia de otro imán 2, cuya función de potencial magnético es V_2; estos dos imanes son sólidos rígidos y cada uno de sus elementos, está invariablemente ligado a una intensidad de magnetización; mientras el imán 2 permanece inmóvil, el imán 1 se desplaza; las acciones del imán 2 sobre el imán 1 efectúan un cierto trabajo. De acuerdo con las doctrinas clásicas del magnetismo, este trabajo es igual a la disminución sufrida por la cantidad

$$W = \int \left(A_1 \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta x_1} + B_1 \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta y_1} + C_1 \frac{\delta \frac{1}{r}}{\delta z_1} \right) d\omega_1 \,.$$

Maxwell demostró esta proposición (‡), que es universalmente aceptada.

Tomó esta proposición como punto de partida y concluyó que la energía de cualquier sistema de cuerpos magnéticos viene dada por la expresión

(103) $$E = \frac{1}{2} \int \left(A \frac{\delta V}{\delta x} + B \frac{\delta V}{\delta y} + C \frac{\delta V}{\delta z} \right) d\omega \,,$$

donde V es la función de potencial magnético de todo el sistema y donde la integral se extiende a todo el sistema. Obviamente es una hipótesis, pero los avances recientes en termodinámica muestran que no está justificada; aunque debió haberle parecido natural en el momento en que Maxwell la escribió y por lo que Maxwell la adoptó (†).

---

[*] J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 57, igualdad (16)
[‡] J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 18, igualdad (3)
[†] J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 304, expresión (6)

A partir de entonces, una transformación clásica permite escribir

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\delta V}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{\delta z}\right)^2\right] d\omega$$

O bien, en virtud de las igualdades (93)

(104)
$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{8\pi}\int\left[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right] d\omega\,.$$

Esta es la expresión de la energía magnética que Maxwell (*) obtuvo.

Esta expresión no coincide con la expresión (73) que deseaba encontrar; ya que falta el factor μ bajo el signo de integración. Para encontrar la expresión de la energía electromagnética que deseaba lograr, Maxwell tuvo que recurrir a la teoría del electromagnetismo.

§7. *La teoría del electromagnetismo en el Treatise on Electricity and Magnetism.*

Resumamos brevemente la teoría del electromagnetismo tal como Maxwell la expuso en su Tratado.

Primero, en un sistema inmóvil, pero de estado eléctrico variable, introdujo un vector, de componentes F, G, H, que debía estar vinculado a los componentes E'_x, E'_y, E'_z, del campo electromotriz por las igualdades (†)

(105)
$$E'_x = -\frac{\delta F}{\delta t}, \qquad E'_y = -\frac{\delta G}{\delta t}, \qquad E'_z = -\frac{\delta H}{\delta t}$$

Este vector es, pues, lo que, en sus escritos anteriores, él llamó, *el estado electrotónico* o el *momento electromagnético* y aquí llama *impulso electrocinético* (††). Enseguida, emite esta afirmación (†††):

"Este vector es idéntico a la magnitud que estudiamos bajo el nombre de *vector potencial de inducción magnética*. "

En apoyo de esta afirmación, Maxwell esboza un comienzo de prueba (*). Las expresiones (105) del campo eléctrico de inducción, aplicadas a un cable cerrado e inmóvil, dan la siguiente expresión para la fuerza de inducción electromotriz total que actúa sobre este cable:

---

* J. Clerk Maxwell, *Loc. cit*., p. 305, igualdad (11).
† J. Clerk Maxwell, *Loc. cit*., pp. 267 y 274, igualdades (*B*)
†† J. Clerk Maxwell, *Loc. cit*., p. 267.
††† J. Clerk Maxwell, *Loc. cit*., p. 267.

$$-\int\left(\frac{\delta F}{\delta t}\frac{dx}{ds}+\frac{\delta G}{\delta t}\frac{dy}{ds}+\frac{\delta H}{\delta t}\frac{dz}{ds}\right)ds\ .$$

En esta expresión, la integral se extiende a todos los elementos lineales *ds* en los que el cable puede estar dividido.

Tomemos el cable como un contorno de un área donde dS es un elemento y sea *N* una normal al elemento *dS*, dirigido en un sentido adecuado; la expresión anterior podría escribirse

$$\int\left[\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta H}{\delta y}-\frac{\delta G}{\delta z}\right)cos(N,x)+\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta F}{\delta z}-\frac{\delta H}{\delta x}\right)cos(N,y)+\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta G}{\delta x}-\frac{\delta F}{\delta y}\right)cos(N,z)\right]dS\ ,$$

La integral se extiende al área considerada.

Pero, por otro lado, si el cable se coloca *en un medio no magnético*, se sabe desde los trabajos de Faraday que esta fuerza electromotriz está relacionada con la variación del campo magnético por la fórmula

$$-\int\left[\frac{\delta\alpha}{\delta t}cos(N,x)+\frac{\delta\beta}{\delta t}cos(N,y)+\frac{\delta\gamma}{\delta t}cos(N,z)\right]dS\ .$$

Las igualdades (105) estarán de acuerdo con las leyes de inducción en un circuito cerrado, dentro de un medio no magnético, si se tiene

(106) $$\frac{\delta H}{\delta y}-\frac{\delta G}{\delta z}=-\alpha\,,\qquad \frac{\delta F}{\delta z}-\frac{\delta H}{\delta x}=-\beta\,,\qquad \frac{\delta G}{\delta x}-\frac{\delta F}{\delta y}=-\gamma\,.$$

Estas igualdades (106) pueden considerarse casos especiales de las ecuaciones

(99 bis) $$\begin{cases}\dfrac{\delta H}{\delta y}-\dfrac{\delta G}{\delta z}=-(\alpha+4\pi A)=-\mathsf{A}\\[2mm] \dfrac{\delta F}{\delta z}-\dfrac{\delta H}{\delta x}=-(\beta+4\pi B)=-\mathsf{B}\\[2mm] \dfrac{\delta G}{\delta x}-\dfrac{\delta F}{\delta y}=-(\gamma+4\pi C)=-\mathsf{C}\end{cases}$$

Las ecuaciones (106) no se justifican, pero hacen aceptable la hipótesis de Maxwell adoptando (*) las ecuaciones (99bis).

* J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 267, nº 592.
* J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 266, igualdades (*A*).

En el caso en el que el medio magnético sea perfectamente liso y donde la función de magnetización de este medio se reduzca a un coeficiente independiente de la intensidad de la magnetización, tenemos (*)

(102) $\mathsf{A} = \mu\alpha\,, \qquad \mathsf{B} = \mu\beta\,, \qquad \mathsf{C} = \mu\gamma$

y las igualdades (99bis) toman la forma

(80bis)
$$\begin{cases} \dfrac{\delta H}{\delta y} - \dfrac{\delta G}{\delta z} = -\mu\alpha \\ \dfrac{\delta F}{\delta z} - \dfrac{\delta H}{\delta x} = -\mu\beta \\ \dfrac{\delta G}{\delta x} - \dfrac{\delta F}{\delta y} = -\,\mu\gamma \end{cases}$$

ya dadas en la memoria: *A dynamical Theory of the Electromagnetic Field*. Unidas a las igualdades (**)

(31)
$$\begin{cases} \dfrac{\delta\gamma}{\delta y} - \dfrac{\delta\beta}{\delta z} = -\,4\pi\left(u + \bar{u}\right) \\ \dfrac{\delta\alpha}{\delta z} - \dfrac{\delta\gamma}{\delta x} = -\,4\pi\left(v + \bar{v}\right) \\ \dfrac{\delta\beta}{\delta x} - \dfrac{\delta\alpha}{\delta y} = -\,4\pi\left(w + \bar{w}\right) \end{cases}$$

Las ecuaciones (80bis) forman el grupo, hoy célebre, de las *seis ecuaciones de Maxwell*.

Las funciones *F*, *G*, *H* que figuran en las ecuaciones (80bis) so non enteramente determinadas, lo hemos remarcado ya dos veces; para lograr determinarlas, se deberá conocer el valor de la cantidad (***)

(81bis)
$$\frac{\delta F}{\delta x} + \frac{\delta G}{\delta y} + \frac{\delta H}{\delta z} = J$$

Esta cantidad tiene un valor desconocido, lo que complica el cálculo siguiente(†):

Las igualdades (80bis) y (31) dan fácilmente las relaciones

* J. Clerk Maxwell, *Loc. cit*., p. 289, nº 614.

** J. Clerk Maxwell, *Loc. cit*., p. 286, igualdades (*E*) y p. 290.

*** J. Clerk Maxwell, *Loc. cit*., p. 290, igualdad (2).

† J. Clerk Maxwell, *Loc. cit*., p. 290, nº 616. Este cálculo ya figuraba casi textual en la memoria *A dynamical Theory of the Electromagnetic Field*. (J. Clerk Maxwell, Scientific Papers, vol. I. p. 581.)

$$\Delta F = \frac{\delta J}{\delta x} - 4\pi\mu\left(u + \overline{u}\right),$$
$$\Delta G - \frac{\delta J}{\delta y} - 4\pi\mu\left(v + \overline{v}\right),$$
$$\Delta H - \frac{\delta J}{\delta z} - 4\pi\mu\left(w + \overline{w}\right),$$

Entonces, si ponemos

(107) $$\begin{cases} F' = \int \frac{\mu_1\left(u_1 + \overline{u}_1\right)}{r} d\omega_1, \\ G' = \int \frac{\mu_1\left(v_1 + \overline{v}_1\right)}{r} d\omega_1, \\ H' = \int \frac{\mu_1\left(w_1 + \overline{w}_1\right)}{r} d\omega_1, \end{cases}$$

(108) $$\mathrm{X} = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{J_1}{r_1} d\omega_1,$$

fórmulas donde las integraciones se extienden a todo el espacio, tendremos

(109) $$\begin{cases} F = F' + \frac{\delta \mathrm{X}}{\delta x}, \\ G = G' + \frac{\delta \mathrm{X}}{\delta y}, \\ H = H' + \frac{\delta \mathrm{X}}{\delta z}. \end{cases}$$

"La cantidad X, añadió Maxwell (*), desaparece de las ecuaciones (80bis) y no se relaciona con ningún fenómeno físico. Si suponemos que es cero, *J* también es cero en todos los puntos, y las ecuaciones (107), omitiendo los tildes en los símbolos, dan los valores verdaderos de los componentes del *vector potencial*.

La cantidad X, ciertamente, desaparece de las igualdades (80bis); pero aparece en las igualdades (105); ¿Es tan obvio que no tiene influencia sobre ningún fenómeno físico? Sin duda, la fuerza electromotriz total que actúa en un circuito cerrado

$$-\int\left(\frac{\delta F}{\delta t}\frac{dx}{ds} + \frac{\delta G}{\delta t}\frac{dy}{ds} + \frac{\delta H}{\delta t}\frac{dz}{ds}\right)ds$$

podría también escribirse

* J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 291.

$$-\int\left(\frac{\delta F'}{\delta t}\frac{dx}{ds}+\frac{\delta G'}{\delta t}\frac{dy}{ds}+\frac{\delta H'}{\delta t}\frac{dz}{ds}\right)ds$$

y su valor será independiente de la determinación atribuida a la función X, pero no se sigue que no intervenga en ninguna discusión sobre Física; afirmarlo, sería tildar de absurdo un pasaje que Maxwell escribió (**) después de lo anterior.

La fuerza electromotriz que actúa sobre un circuito está dada por la expresión

$$-\int\left(\frac{\delta F}{\delta t}\frac{dx}{ds}+\frac{\delta G}{\delta t}\frac{dy}{ds}+\frac{\delta H}{\delta t}\frac{dz}{ds}\right)ds$$

Maxwell concluyó que el campo electromotriz tiene por componentes, en cada punto

(110) $$E_x=-\frac{\delta\Psi}{\delta x}-\frac{\delta F}{\delta t},\qquad E_y=-\frac{\delta\Psi}{\delta y}-\frac{\delta G}{\delta t},\qquad E_z=-\frac{\delta\Psi}{\delta z}-\frac{\delta H}{\delta t};$$

luego agregó: "Los términos que incluyen la nueva cantidad Ψ han sido introducidos para dar generalidad a las expresiones de E_x, E_y, E_z. Desaparecen cuando la integral se toma a lo largo de un circuito cerrado. Por lo tanto, la cantidad Ψ es indeterminada, al menos en lo que concierne al problema presente, donde nos proponemos obtener la fuerza electromotriz total que actúa a lo largo de un circuito. Pero veremos que, cuando conocemos todas las condiciones del problema, podemos asignar a Ψ un valor determinado, que es el potencial eléctrico en el punto (x, y, z).

Si la función Ψ desempeña un papel en el análisis de ciertos problemas de electricidad, ¿por qué la función X no cumple alguno?

Son los dos grupos de ecuaciones (80bis) y (31) los que proporcionaron a Maxwell la expresión de la energía electromagnética que quería obtener, mediante un cálculo casi similar al que se da en la memoria: *A dynamical Theory of the Electromagnetic Field* y que hemos expuesto en el § 5.

Esta energía, según Maxwell, tiene su primera expresión (*)

$$E=\frac{1}{2}\int\left[F\left(u+\overline{u}\right)+G\left(v+\overline{v}\right)+H\left(w+\overline{w}\right)\right]d\omega\ .$$

Las igualdades (31) la transforman en

$$E=-\frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\delta\gamma}{\delta y}-\frac{\delta\beta}{\delta z}\right)F+\left(\frac{\delta\alpha}{\delta z}-\frac{\delta\gamma}{\delta x}\right)G+\left(\frac{\delta\beta}{\delta x}-\frac{\delta\alpha}{\delta y}\right)H\right]d\omega\,.$$

** J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 274.
* J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 305, n^{os} 634 a 636.

Una integración por partes da

$$E = -\frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\delta H}{\delta y}-\frac{\delta G}{\delta z}\right)\alpha+\left(\frac{\delta F}{\delta z}-\frac{\delta H}{\delta x}\right)\beta+\left(\frac{\delta G}{\delta x}-\frac{\delta F}{\delta y}\right)\gamma\right]d\omega$$

O bien, en virtud de las igualdades (99bis)

(111 $$E = \frac{1}{8\pi}\int\left[A\alpha + B\beta + C\gamma\right]d\omega\,.$$

En el caso en el que el sistema contiene solo cuerpos magnéticos perfectamente lisos, las igualdades (102) transforman a la igualdad (111) en

(73) $$E = \frac{1}{8\pi}\int\mu\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)d\omega\,.$$

Así, mediante un método electrodinámico Maxwell encuentra una expresión de la *energía electromagnética* que en la memoria*: On physical Lines of Force* había obtenido por medio de hipótesis mecánicas.

Lo que expresan las ecuaciones (104) y (73) no concuerdan; este desacuerdo no escapa a Maxwell y lo deja atascado. Primero, al hablar de la energía magnética tomada en la forma (104), declaró ([†]) que "esta parte de la energía se incluirá en la energía cinética en la forma que vamos a darle". es decir, en la forma (73); pero después, reconoció ([††]) que la expresión obtenida para la energía electromagnética, junto con el postulado de que dicha energía representa la fuerza viva, no puede estar de acuerdo con la teoría habitual del magnetismo: "Esta forma de explicar el magnetismo también requiere que abandonemos el método donde consideramos a un imán como un cuerpo continuo y homogéneo, donde la parte más pequeña tiene propiedades magnéticas similares a las del todo, sino que debemos considerar a un imán como una cantidad muy considerable de circuitos eléctricos ... "

Al redactar su tratado, Maxwell propuso tomar como punto de partida las leyes bien establecidas de la electricidad y el magnetismo y traducirlas mediante ecuaciones cuya forma irían mostrando la ligazón entre estas leyes y los principios de la dinámica. Pero la realidad mostró estar lejos de esa idea y, más bien, incitaba a renunciar a una interpretación mecánica de los fenómenos electromagnéticos. Sin embargo, Maxwell prefirió renunciar a una de las ramas más perfectas de la Física racional, la teoría del Magnetismo; así lo hemos visto, en nuestra Primera Parte, abandonar la electrostática, que era la doctrina mejor establecida por las hipótesis más aventuradas.

La electrodinámica de Maxwell procede de acuerdo con el método insólito que ya hemos analizado al analizar la electrostática bajo la influencia de las hipótesis que permanecían vagas e

[†] J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 304.
[††] J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 309.

imprecisas en su mente. Maxwell esbozó una teoría que luego no completó, de la que ni siquiera se molestó en disipar las contradicciones; luego modificó constantemente esta teoría, le impuso cambios esenciales que no señaló a sus lectores e hizo vanos esfuerzos para fijar su pensamiento fugaz y elusivo; en el momento en que pensaba que lo alcanzaría, vio que las mismas partes de la doctrina que están relacionadas con los fenómenos mejor estudiados se desvanecían.

Sin embargo, ese método extraño y desconcertante fue el que condujo a Maxwell a la teoría electromagnética de la luz.

CAPÍTULO III

La teoría electromagnética de la luz

§1. *La velocidad de la luz y la propagación de las acciones eléctricas; investigaciones de W. Weber y de G. Kirchhoff*

Debemos remontarnos a los trabajos de Wilhelm Weber para encontrar la primera mención, dentro del estudio de los fenómenos eléctricos, del número que mide la velocidad de propagación de la luz en el vacío.

El primer estudio publicado (*) en 1846 por W. Weber, bajo el título *Elektrodynamische Maassbestimmungen*, contenía un apéndice cuyo título era:

Ueber die Zusammenhang der elektrostatischen und der elektrodynamischen Erscheinungen nebst Anwendung auf die elektrodynamischen Maasbestimmungen.

Este apéndice contiene la célebre ley de Weber.

Un cable atravesado por una corriente eléctrica es en realidad el asiento de dos corrientes de direcciones opuestas; una, dirigido en la dirección de la corriente, transporta electricidad positiva; el otro, dirigido en la dirección opuesta, lleva electricidad negativa; cuando la corriente es uniforme, estas dos corrientes tienen un flujo igual.

Por otro lado, la ley de acción mutua de dos cargas eléctricas enunciadas por Coulomb es una ley incompleta; sólo se aplica a las cargas que están en reposo relativo; si dos cargas eléctricas e, e' están separadas por una distancia variable r con el tiempo t, estas dos cargas se repelen entre sí por una fuerza cuya expresión es

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1-\frac{a^2}{16}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{a^2}{8}r\frac{d^2r}{dt^2}\right].$$

Aplicada al cálculo de acciones electrodinámicas, esta ley restaura la ley elemental de Ampère; Aplicado a los fenómenos de inducción, formula la ley matemática.

La constante a aparece en cada una de estas leyes. Veamos, en particular, cómo ella figura en la ley de Ampère.

(*) W. Weber, *Elektrodynamische Maassbestimmungen*. Leipzig, 1846.

Dos elementos de corrientes uniformes *ds, ds'* están presentes; en el primero, una corriente de electricidad positiva y una corriente de electricidad negativa tienen un valor común *i*; en el segundo, estas dos corrientes tienen un valor común *i'*; ε es el ángulo entre los dos elementos, *r* la distancia que los separa, θ, θ' los ángulos que estos elementos forman con la línea que va desde un punto del elemento *ds* hasta un punto del elemento *ds'*. Esos dos elementos se repelen con una fuerza

$$-a^2 \frac{ids\, i'\, ds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right)$$

Las *intensidades J, J'* de las dos corrientes están relacionadas con los flujos parciales *i, i'* por las relaciones

$$J = 2i\,, \qquad J' = 2i'\,.$$

La fuerza anterior todavía se puede escribir

$$-\frac{a^2}{4}\frac{Jds\, J'\, ds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right).$$

Hoy, esta fórmula generalmente se escribe de la siguiente manera:

$$-2A^2 \frac{Jds\, J'\, ds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right),$$

A^2 es la *constante fundamental de las acciones electromagnéticas evaluada en unidades electrostáticas*. Como puede verse, la constante a^2 de Weber está ligada a esta constante A^2 por la relación

(112) $$A^2 = \frac{a^2}{8}\,.$$

Además, W. Weber pronto cambió la forma de su ley, la que escribió

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2}{c^2} r \frac{d^2 r}{dt^2}\right].$$

Así introducida, la nueva constante c^2 está ligada a la constante a^2 por la igualdad

$$\frac{1}{c^2} = \frac{a^2}{16}$$

Por lo tanto, en virtud de la igualdad (112) está vinculado a la constante A^2 por la igualdad

$$A^2 = \frac{2}{c^2}.$$

Es claro que *c* es una magnitud de las mismas dimensiones que una velocidad.

Supongamos que la velocidad con la cual dos cargas *e* y *e'* se aproximan o se alejan entre sí. Cuando el valor absoluto de la velocidad de cada una es dr/dt, esa velocidad es uniforme; d^2r/dt^2 será igual a 0 y las dos cargas se repelerán con una fuerza

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

si se cumple

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2,$$

Esas dos fuerzas se destruirán, la fuerza electrodinámica $-\frac{1}{c^2}\frac{ee'}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ será equilibrada por la fuerza electrostática $\frac{ee'}{r^2}$.

En una memoria clásica, (*) W. Weber y R. Kohlrausch, determinaron experimentalmente el valor de *c*; encontraron que este valor, expresado en *milímetros por segundo*, era

$$c = 439450 \times 10^6.$$

De este resultado ellos expresaron la siguiente reflexión:

"Esta determinación de la constante *c* demuestra que dos masas eléctricas deberían moverse con una velocidad muy grande entre sí, si quisiéramos que la *fuerza electrodinámica* se equilibre con la *fuerza electrostática*, a saber, con una velocidad de 439 millones de metros por segundo, o 59.320 millas, por segundo, esta velocidad supera con creces a la de la luz".

Al año siguiente, G. Kirchhoff (**) propuso deducir de la teoría de Weber las leyes según las cuales la inducción electrodinámica se propaga en un cable conductor.

Señaló que la resistencia del cable figura en las ecuaciones obtenidas, pero dividida por un factor constante cuyo valor numérico es extremadamente grande; de modo que en un cable de cobre de unos pocos metros de longitud, de unos pocos milímetros de radio, las leyes de variación de la

---

[*] R. Kohlrausch y W. Weber, *Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanische Maas*, Leipzig, 1856.

[**] G. Kirchhoff, *Ueber die Bewegung der Elektricität in Drähten*, (*Poggendorf's Annalen*, Bd. C, 1857)

corriente eléctrica eran esencialmente las mismas que si el cable tuviera una resistencia nula. En este caso límite, donde se supone que el cable no tiene resistencia, la intensidad J de la corriente eléctrica que atraviesa un conductor cerrado se expresa, en el tiempo t, mediante la siguiente fórmula:

$$J = -\frac{c}{4\sqrt{2}} e^{-ht} \left[f\left(s + \frac{c}{\sqrt{2}} t\right) + f\left(s - \frac{c}{\sqrt{2}} t\right) \right],$$

s es la longitud del cable desde un origen determinado hasta el punto considerado, h una constante y f una función arbitraria.

Esta corriente puede ser considerada como el resultado de la superposición de otras dos corrientes de intensidades respectivas

$$J' = \frac{c}{4\sqrt{2}} e^{-ht} f\left(s + \frac{c}{\sqrt{2}} t\right),$$

$$J'' = -\frac{c}{4\sqrt{2}} e^{-ht} f\left(s - \frac{c}{\sqrt{2}} t\right),$$

o de dos ondas amortiguadas que se propagan en sentidos opuestos con una velocidad $c/\sqrt{2}$.

"La velocidad de propagación de una onda eléctrica", dice Kirchhoff, "es, de acuerdo con esto, igual a $c/\sqrt{2}$, por lo tanto, es independiente de la sección del cable, de su conductividad y, en fin, de la densidad eléctrica; su valor es de 41.950 millas por segundo, y está muy cerca de la velocidad con la que la luz se propaga a través de un espacio vacío."

El análisis del movimiento de la electricidad en un cable, que condujo a G. Kirchhoff a esta notable consecuencia, fue luego extendido ([*]) por el mismo autor a los conductores cuyas tres dimensiones son finitas.

El resultado obtenido por G. Kirchhoff no pudo dejar de impactar a Weber. Se comprometió a someter las oscilaciones de una corriente eléctrica variable en un cable conductor, a un completo estudio teórico y experimental ([**]). Este estudio confirmó las investigaciones de Kirchhoff. Mediante ciertas hipótesis, entre las cuales se encuentra la pequeñez de la resistencia del cable, reconoció que "$c/\sqrt{2}$, es el límite hacia el cual tienden todas las velocidades de propagación, y para el valor dado de c

$$c = 439450 \times 10^6 . \frac{mm}{s}$$

[*] G. Kirchhoff, *Ueber die Bewegung der Elektricität in Leitern*, (*Poggendorf's Annalen*, Bd. C II, 1857).

[**] Wilhem Weber *Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen*¸Leipzig, 1864.

el valor de este límite es

$$\frac{c}{\sqrt{2}} = 310740 \times 10^6 . \frac{mm}{s}$$

es decir, una velocidad de 41950 millas por segundo."

"G. Kirchhoff ya ha encontrado esta expresión para la velocidad de propagación de las ondas eléctricas, y ha observado que es independiente de la sección del cable, de su conductividad y de la densidad eléctrica, que su valor, que es 41,950 millas por segundo, está muy cerca de la velocidad de la luz en el vacío. Si esta concordancia, aproximada, entre la velocidad de propagación de las ondas eléctricas y la velocidad de la luz podría ser considerada como el indicio de una relación íntima entre las dos doctrinas, merece el mayor interés; ya la búsqueda de tal relación es de gran importancia. Pero es evidente que primero debemos considerar el verdadero significado de esta velocidad en lo que concierne a la electricidad; y este significado no parece ser suficiente para alentar grandes esperanzas."

"De hecho, como hemos mostrado anteriormente, para que la verdadera velocidad de propagación se acerque a este límite coincidiendo con la velocidad de la luz, es necesario no sólo que el cable sea muy delgado respecto a su largo sino, también, que este cable largo y delgado tenga una resistencia muy pequeña. Es obvio que la velocidad real se acercará muy raramente este valor límite y que, muy a menudo, estará muy lejos de eso."

§ 2. *La velocidad de la luz y la propagación de acciones eléctricas; investigación de B. Riemann, C, Neumann y L. Lorenz.*

La igualdad, al menos aproximada

$$A^2 = \frac{1}{V^2}, \tag{114}$$

donde *V* designa la velocidad de la luz en el vacío, es, no obstante, una consecuencia de los experimentos de Weber y Kohlrausch y, a pesar de las aproximaciones a las que estuvo sometida la proposición demostrada por G. Kirchhoff, esta igualdad era demasiado llamativa para no ver que marcaba una relación íntima entre la luz y la electricidad. A partir de ese momento, los físicos trataron de introducir en las teorías eléctricas la idea de una propagación que ocurriría a través del espacio con la misma velocidad de la luz.

El 10 de febrero de 1858, Bernhard Riemann leyó una nota ante la Sociedad de Ciencia de Göttingen titulada: *Ein Beitrag zur Electrodynamik*; esta nota fue publicada ([*]) sólo después de la muerte del ilustre analista.

El punto de partida adoptado por Riemann es el siguiente:

Supongamos que un punto M contiene, en el instante t, una carga eléctrica variable con t, $q(t)$. En general, se acepta que en un punto M', situado a una distancia r del punto M, esta carga eléctrica genera una función potencial cuyo valor, en el mismo instante t, es $q(t)/r$. En el instante t, la función potencial en el punto M' es

$$V' = \sum \frac{q(t)}{r}.$$

Riemann admite que en el instante t, la función potencial engendrada en M' por la carga del punto M es $\frac{1}{r} q\left(t - \frac{r}{a}\right)$, donde a es una constante positiva. La función potencial en M' en el instante t es

$$V' = \sum \frac{q(t-a)}{r}.$$

Evidentemente, uno puede enunciar esta hipótesis, diciendo que la función potencial electrostático, en lugar de propagarse instantáneamente en el espacio, como se admite generalmente, se propaga con la velocidad finita a.

A partir de esta hipótesis, Bernhard Riemann dedujo para el potencial electrodinámico mutuo de dos sistemas, una fórmula que coincide con la que W. Weber había dado, siempre que se tome

$$a = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

"De acuerdo con la determinación de Weber y Kohlrausch, tenemos

$$c = 439450 \times 10^6 . \frac{mm}{s}$$

"Como resultado, a es igual a 41,949 millas geográficas[‡] por segundo, mientras que los cálculos de Busch, basados en las observaciones de aberraciones hechas por Bradley, dan para c una velocidad de la luz de 41,994 millas por segundo y Fizeau, por una medida directa, encontró 41882 millas por segundo."

---

[*] Bernhard Riemann, *Ein Beitrag zur Elektrodynamik Poggendorf's Annalen*, Bd. CXXXI, *Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke*, p. 270; 1876.

[‡] Se tomaba 1 milla geográfica = 7,42 *km* (*N. del T.*)

Por lo tanto, Riemann pudo resumir su contribución a la electrodinámica, de la siguiente manera:

"Encontré que uno podría explicar las acciones electrodinámicas de las corrientes eléctricas al suponer que la acción de una masa eléctrica sobre otra no ocurre instantáneamente, sino que se propaga con una velocidad constante; esta velocidad es, por cierto, siempre igual, salvando los errores de la experiencia, a la velocidad de la luz."

Desafortunadamente, de acuerdo con una observación de Clausius ([*]), el análisis de B. Riemann fue ciertamente incorrecto; el editor de las obras de Riemann, M. H. Weber, presumiblemente supuso que el error fue reconocido por Riemann, lo que le impidió entregar su nota a la imprenta.

En 1868, mientras el escrito de Riemann era aún desconocido, la Universidad de Bonn celebró su quincuagésimo aniversario. Como *Gratulationsschrift* de la Universidad de Tübingen, el Sr. Carl Neumann presentó un escrito titulado: *Theoria nova phænomenis electricis applicanda*; este escrito contenía el resumen de una teoría que fue, más tarde, publicado *in extenso* bajo el título ([†]): *Die Principien der Elektrodynamik*.

La hipótesis fundamental de Carl Neumann fue esencialmente consistente con la de Riemann; el autor lo expresó en estos términos: "Nova introducitur suppositio, statuendo, causam illam motricem, quam potentiale vocamus, ab altera massa ad alteram non subito sed progrediente tempore transmitti, atque – ad instar lucis – per spatium propagari celeritate quadam permagna et constante. Quam celeritatem denotabimus litera *c*."([**])

"Ista suppositio, conjuncta cum hac altera, principium Hamiltonianum normam exprimere supremam ac sacrosanctam nullis exceptionibus obviam, fit *suppositio in theoria nostra fundamentalis*, ex qua (absque ulla ulteriore suppositione) leges illæ notissimæ a cel*is* Ampère, Neumann, Weber, conditæ sua sponte emanabunt."([***])

Pero si la hipótesis esencial admitida por el Sr. Carl Neumann coincide con la emitida por B. Riemann, inmediatamente se aparta de ella cuando su autor la traduce en fórmulas.

Considere, dice él, dos puntos *M*, *M'*, teniendo cargas eléctricas y actuando entre ellos; en el instante *t* sea *r* la distancia que los separa. De acuerdo con lo que hemos dicho sobre la propagación del potencial, debemos distinguir dos tipos de potencial: el *potencial de emisión* y el *potencial receptivo*.

---

[*] R. Clausius, *Poggendorf's Annalen*, Bd. CXXXV, p. 606, 1869.

[†] C. Neumann, *Die Principien der Elektrodynamik*¸ *Mathematische Annalen*, Bs. XVII, p. 400.

[**] Introducimos una nueva suposición en la cuestión de la fuerza motriz que llamamos potencial que la alteración de una masa a otra no es súbita sino que se transmite a medida que pasa el tiempo – a semejanza de la luz – y se propaga por el espacio con cierta celeridad de magnitud muy grande y constante. A esa celeridad la denominamos con la letra *c*.

[***] Esta suposición conjuntamente con otra, el supremo y sacrosanto principio de Hamilton, no admiten ninguna excepción, son las suposiciones fundamentales de nuestra teoría (sin ninguna suposición ulterior), fundada en las notorias y célebres leyes de Ampère, Neumann, Weber, que emanan de sus propios cimientos.

El *potencial emisivo* del punto *M* es el potencial que es emitido por el punto *M* en el instante *t*, y que alcanza el punto *M'* sólo un cierto tiempo después; él tiene por expresión

$$\omega_0 = \frac{ee'}{r}.$$

En cuanto al *potencial receptivo*, Carl Neumann lo define en estos términos: "*Potentiale receptivum* vocabimus id, quod utrumque punctum recipit tempore *t*, aliquanto antea ab altero puncto emissum". Unde elucet potenciale receptivum respectu *dati* temporis cujuslibet formatum idem esse ac potentiale emissivum respecta temporis cujusdam *prioris* formatum."†

Por consideraciones que sería demasiado largo para explicar aquí, pero que se encontrarán en el escrito titulado *Die Principien der Elektrodynamik*, Carl Neumann logra la expresión del potencial receptivo ω que da las siguientes igualdades:

$$\omega = w + \frac{d\pi}{st},$$

$$w = \frac{ee'}{r^2}\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right],$$

$$\pi = ee'\left(\frac{\log r}{c} - \frac{1}{2c^2}\frac{dr}{dt}\right).$$

A partir de esta expresión del potencial de emisión, el uso del principio de Hamilton hace posible obtener la expresión de la fuerza que actúa en cada punto en el instante *t*; esta fuerza se dirige a lo largo de la línea que une los dos puntos, es repulsiva y tiene por magnitud

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right].$$

Esta es la fuerza dada por la ley de Weber.

Para que la teoría del Sr. Carl Neumann concuerde con las leyes conocidas de la electrodinámica, será necesario dar a la constante *c* el valor , determinado por Weber y Kohlrausch

$$c = 439450 \times 10^6 . \frac{mm}{s}$$

† Llamamos potencial receptivo al potencial que se recibe en cada punto en un instante *t* cierto tiempo después que fue emitido desde otro punto. Por lo tanto, es claro que el potencial receptivo formado con respecto en un instante dado es el mismo que el potencial de emisión formado con respecto a cualquier instante anterior.

Por lo tanto, el potencial no se propaga con una velocidad igual a la velocidad V de la luz en el vacío, sino con una velocidad mayor e igual a $V\sqrt{2}$.

En el mismo volumen de los *Annalen* de Poggendorff, donde se imprimió por primera vez la hipótesis electrodinámica de Bernhard Riemann, Ludwig Lorenz publicó (*) una teoría que concordaba con el pensamiento de Riemann, entonces desconocido para el autor, y una afinidad más estrecha con la teoría de Carl Neumann.

Al generalizar por inducción las ecuaciones de la electrodinámica dadas por W. Weber, G. Kirchhoff (**) obtuvo un sistema de ecuaciones que gobernaban la propagación de acciones eléctricas en los cuerpos conductores.

Sea $V = \sum \frac{q}{r}$ la función *potencial electrostático* donde la sumatoria se extiende a todas las cargas eléctricas q del sistema.

Esta función se puede expresar de forma más explícita.

Al instante t, en el punto (x, y, z) de un volumen electrizado, la densidad eléctrica sólida tiene por valor $\sigma\ (x, y, z, t)$; en el instante t, en el punto (x, y, z) de una superficie electrizada, la densidad eléctrica superficial tiene por valor $\Sigma\ (x, y, z, t)$. Por lo tanto, tenemos

(114)
$$V(x,y,z,t) = \int \frac{\sigma(x',y',z',t)}{r}\, d\omega' + \int \frac{\Sigma(x',y',z',t)}{r}\, dS'$$

la primera integral se extiende a todos los elementos $d\omega'$ de los volúmenes electrizados y la segunda a todos los elementos dS' de las superficies electrizadas.

Sean

$$u(x,y,z,t), \qquad v(x,y,z,t), \qquad w(x,y,z,t)$$

los tres componentes de la corriente eléctrica (***) en el punto (x, y, z), en el instante t.

Consideremos las funciones

* L. Lorenz, *Sur l'idéntité des vibrations de la lumière et des courants électriques* (cf. Selkabs. Overs. 1867, p. 26 – *Poggendorf annalen*, Bd. CXXXI, p.243; 1867. – *Œeuvres scientifiques de L. Lorenz, revues et annotées par H. Valentinier*, t. I. p. 173; 1896).

** G. Kirchhoff, *Ueber die Bewegung der Elektricität in Leitern*, (*Poggendorf's Annalen*, Bd. C II, 1857).

*** En la memoria de G. Kirchhoff, *u, v, w*, tienen un sentido ligeramente diferente, ligado a las concepciones particulares de Weber sobre la naturaleza de la corriente eléctrica.

$$(115)\begin{cases} U(x,y,z,t)=\int \frac{x'-x}{r^3}\left[(x'-x)\,u(x',y',z',t)+(y'-y)\,v(x',y',z',t)+(z'-z)\,w(x',y',z',t)\right]d\omega \\ V(x,y,z,t)=\int \frac{y'-y}{r^3}\left[(y'-y)\,u(x',y',z',t)+(y'-y)\,v(x',y',z',t)+(z'-z)\,w(x',y',z',t)\right]d\omega \\ Z(x,y,z,t)=\int \frac{z'-z}{r^3}\left[(x'-x)\,u(x',y',z',t)+(y'-y)\,v(x',y',z',t)+(z'-z)\,w(x',y',z',t)\right]d\omega \end{cases}$$

Según G. Kirchhoff, las ecuaciones del movimiento de la electricidad en un cuerpo conductor, se escriben

$$(116)\qquad \begin{cases} u=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta V}{\delta x}+\frac{2}{c^2}\frac{\delta U}{\delta t}\right), \\ v=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta V}{\delta y}+\frac{2}{c^2}\frac{\delta V}{\delta t}\right), \\ w=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta V}{\delta z}+\frac{2}{c^2}\frac{\delta W}{\delta t}\right). \end{cases}$$

L. Lorenz señaló acertadamente que, tomando como punto de partida, no las fórmulas de inducción dadas por Weber, sino otras fórmulas que son rigurosamente equivalentes a ellas, en el único caso estudiado hasta ahora, el de las corrientes lineales uniformes, uno puede obtener no sólo las ecuaciones anteriores sino, además, otras ecuaciones similares, en particular estas

$$(117)\qquad \begin{cases} u=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta V}{\delta x}-\frac{2}{c^2}\frac{\delta F}{\delta t}\right), \\ v=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta V}{\delta y}-\frac{2}{c^2}\frac{\delta G}{\delta t}\right), \\ w=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta V}{\delta z}-\frac{2}{c^2}\frac{\delta H}{\delta t}\right), \end{cases}$$

donde tenemos

$$(118)\qquad \begin{cases} F(x,y,z,t)=\int \frac{u(x',y',z',t)}{r}\,d\omega', \\ G(x,y,z,t)=\int \frac{v(x',y',z',t)}{r}\,d\omega', \\ H(x,y,z,t)=\int \frac{w(x',y',z',t)}{r}\,d\omega'. \end{cases}$$

Este comentario fue pronto tomado por Helmholtz (*) porque le sugirió la introducción, en las teorías electrodinámicas, de una constante numérica, de gran importancia, que designó con la letra *k*.

* Helmholtz, *Ueber die Gesetze der inconstanten elektrischen Ströme in körperlich ausgedehnten Leitern* (VERHANDLUNGEN DES NATURHISTORISCH-MEDICINISCHEN VEREINS ZU HEIDELBERG, 21 de enero de 1870. — WISSENSCHAFTLICHE ABHANDLUNGEN, Bd. I, p. 537). — *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektrodynamik für*

Estas son las ecuaciones (117) que L. Lorenz tomó como las ecuaciones del movimiento de la electricidad; pero en lugar de mantener las funciones *V, F, G, H*, definidas por las igualdades (114) y (118), sustituyó las funciones

(114bis) $$\overline{V}(x,y,z,t)=\int \frac{\sigma\left(x',y',z',t-\frac{r}{a}\right)}{r}d\omega'+\int \frac{\Sigma\left(x',y',z',t-\frac{r}{a}\right)}{r}dS',$$

(118bis) $$\begin{cases}\overline{F}(x,y,z,t)=\int\{u(x',y',z',t-r/a)/r\}d\omega' \\ \overline{G}(x,y,z,t)=\int\{v(x',y',z',t-r/a)/r\}d\omega' \\ \overline{H}(x,y,z,t)=\int\{w(x',y',z',t-r/a)/r\}d\omega'\end{cases}$$

(119) $$a=\frac{c}{\sqrt{2}}$$

Como vimos, esta es la hipótesis, emitida por B. Riemann, de que la función de potencial eléctrico se propaga con la velocidad *a*, que admitió Lorenz y que se extiende a las funciones *F*, *G*, *H*, componentes del estado electrotónico.

Las ecuaciones (117) se vuelven

(117bis) $$\begin{cases}u=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta\overline{U}}{\delta x}+\frac{2}{c^2}\frac{\delta\overline{F}}{\delta t}\right) \\ v=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta\overline{V}}{\delta y}+\frac{2}{c^2}\frac{\delta\overline{G}}{\delta t}\right) \\ w=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta\overline{W}}{\delta z}+\frac{2}{c^2}\frac{\delta\overline{H}}{\delta t}\right)\end{cases}$$

Estas ecuaciones difieren de las ecuaciones que se obtienen por sustitución de *t* por *t – r*/*a*; ahora, en todos los experimentos, *r* es igual, como máximo, a unos pocos metros, mientras que *a* representa una velocidad de, aproximadamente, 300,000 kilómetros por segundo; por lo tanto, *t – r*/*a* difiere muy poco de *t* y la ecuación (117) se puede considerar igualmente verificada por la experiencia.

Se verifica fácilmente que en todo punto de una masa continua se tiene

---

ruhende leitende Körper (BORCHARDT'S JOURNAL FÜR REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, Bd. LXXII, p. 57. — WISSENSCHAFTLICHE ABHANDLUNGEN, Bd. I, p. 545).

$$a^2\Delta\overline{V} - \frac{\delta^2\overline{V}}{\delta t^2} = -\,4\pi a^2\sigma(x,y,z,t),$$

$$a^2\Delta\overline{F} - \frac{\delta^2\overline{F}}{\delta t^2} = -\,4\pi a^2 u(x,y,z,t),$$

$$a^2\Delta\overline{G} - \frac{\delta^2\overline{G}}{\delta t^2} = -\,4\pi a^2 v(x,y,z,t),$$

$$a^2\Delta\overline{H} - \frac{\delta^2\overline{H}}{\delta t^2} = -\,4\pi a^2 w(x,y,z,t).$$

Por lo tanto, no es difícil ver que las ecuaciones (117bis) y (119) permiten escribir las ecuaciones

$$(120)\qquad \begin{cases} \Delta u = -\dfrac{2}{c^2}\dfrac{\delta^2 u}{\delta t^2} = \dfrac{4\pi}{\rho}\left(\dfrac{\delta\sigma}{\delta x} + \dfrac{2}{c^2}\dfrac{\delta u}{\delta t}\right) \\ \Delta v = -\dfrac{2}{c^2}\dfrac{\delta^2 v}{\delta t^2} = \dfrac{4\pi}{\rho}\left(\dfrac{\delta\sigma}{\delta y} + \dfrac{2}{c^2}\dfrac{\delta v}{\delta t}\right) \\ \Delta w = -\dfrac{2}{c^2}\dfrac{\delta^2 w}{\delta t^2} = \dfrac{4\pi}{\rho}\left(\dfrac{\delta\sigma}{\delta z} + \dfrac{2}{c^2}\dfrac{\delta w}{\delta t}\right) \end{cases}$$

a la que debe adjuntarse la ecuación de continuidad

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} + \frac{\delta\sigma}{\delta t} = 0\,\text{-}$$

Es fácil ver que cada una de las tres cantidades

$$\omega_x = \frac{\delta w}{\delta y} - \frac{\delta v}{\delta z}, \qquad \omega_y = \frac{\delta u}{\delta z} - \frac{\delta w}{\delta x}, \qquad \omega_z = \frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta y},$$

verifican la ecuación

$$\Delta\omega - \frac{2}{c^2}\frac{\delta^2\omega}{\delta t^2} = \frac{8\pi}{\rho c^2}\frac{\delta\omega}{\delta t}.$$

Si el medio considerado es extremadamente resistente, de manera que *r* tenga un valor muy grande, el segundo miembro de esta ecuación es despreciable frente al primer miembro y la ecuación se reduce a la bien conocida fórmula

$$\Delta\omega - \frac{2}{c^2}\frac{\delta^2\omega}{\delta t^2} = 0,$$

ecuación que nos enseña que, en el medio considerado, las corrientes eléctricas transversales se propagan con la velocidad $c/\sqrt{2}$. Llegamos así a la proposición siguiente:

En un medio extremadamente resistente, las corrientes eléctricas transversales se propagan con una velocidad igual a la velocidad de la luz en el vacío.

Alentado por este importante resultado, L. Lorenz no dudó en formular una teoría electromagnética de la luz: los medios transparentes son todos muy malos conductores de la electricidad y la luz que se propaga en estos medios está constituida por corrientes eléctricas transversales periódicas.

Sin duda, la hipótesis era seductora; sin embargo, se enfrentaría con grandes dificultades.

En primer lugar, las ecuaciones obtenidas de ninguna manera excluyen la posibilidad de corrientes eléctricas longitudinales, cuyo papel será difícil de explicar.

En segundo lugar, y esta es la objeción más seria, de acuerdo con la teoría anterior, en un medio conductor muy malo, los corrientes eléctricas transversales siempre se propagan con una velocidad igual a la velocidad de la luz en el vacío; por el contrario, en un medio transparente, la luz se propaga con una velocidad que caracteriza a este medio, y que es menor que la velocidad de la luz en el vacío; y no vemos una manera simple de modificar las hipótesis de la teoría anterior de tal manera que esta contradicción desaparezca.

Esta contradicción parecía condenar irremediablemente la teoría electromagnética de la luz propuesta por L. Lorenz.

§3. *La hipótesis fundamental de Maxwell – Polarización electrodinámica de los dieléctricos.*

Una diferencia lógica extremadamente profunda separa las hipótesis de B. Riemann, L. Lorenz, G. Neumann de las hipótesis aceptadas hasta entonces sobre la propagación de las acciones físicas.

La teoría de la emisión de la luz representaba a la propagación de la luz como la marcha de un proyectil; lo que se propagaba en esta teoría era una sustancia.

La propagación del sonido ocurre, por el contrario, sin la sustancia asiento de esta propagación; el aire, por ejemplo, experimente desplazamientos notables; pero, cuando una masa de aire, al principio en movimiento, alcanza el reposo, una masa vecina, que estaba en reposo, se pone en movimiento; en este caso, no se propaga una sustancia, sino un accidente, un movimiento.

Con estos dos tipos, se relaciona la mayoría de las teorías físicas en las que interviene la noción de propagación. En la teoría de las ondulaciones, la transmisión de la luz es la propagación de un movimiento; y cuando, al adoptar las ideas de Weber, Kirchhoff estudió la propagación de la electricidad en los cuerpos conductores, la consideró el flujo de una cierta sustancia.

Por supuesto, uno puede, generalizar más y concebir la corriente eléctrica como la propagación de un accidente en un cuerpo, que no es un movimiento de ese cuerpo, sino una cualidad de cualquier tipo; para un físico, que considera que la electricidad no es un fluido ni un movimiento sino, simplemente, una cierta calidad, las ecuaciones de Kirchhoff representan una propagación de esta cualidad a través de cuerpos conductores.

Pero todas estas formas diferentes de considerar la noción de propagación tienen un carácter común; sustancia o accidente, es algo real que desaparece de una región del espacio para aparecer en una región vecina. Este ya no es el caso en las teorías de la propagación de acciones eléctricas propuestas por Bernhard Riemann, por Ludwig Lorenz o por Carl Neumann; ya no es una realidad que atraviesa el espacio, sino una ficción, un símbolo matemático, como la función potencial o los componentes del estado electrotónico.

Este carácter de las nuevas teorías puede haber sido supuesto por Lorenz; en cualquier caso, fue claramente visto por el Sr. Carl Neumann; ya que éste no dudó en considerar a la función potencial, donde él supuso la propagación, como una realidad: "Potentiis datis", dijo,"potencial datum esse, ac viceversa, potenciali dato, datas esse potentias, satis notum est. Unde apparet in traditam mechanices theoriam nil novi introduci statuendo, potentiale principalem esse causam, ab isto procreari potentias, scilicet potentiale vocare *veram causam motricem*, potentias vero tantummodo formam vel speciem exprimere ab illa causa sibi paratam."([‡]) Creo que este pasaje permitirá, acertadamente, considerar al Sr. Carl Neumann como el creador de la doctrina filosófica y científica, – hoy en día tan en boga –, mediante el nombre de doctrina de la migración energética (*Wanderung der Energie*).

Las ideas de Maxwell no tienen nada en común con estas doctrinas; los símbolos matemáticos no se transmiten; por ejemplo, la función electrostática potencial en el punto (x, y, z), en un instante dado, en un medio de potencia dieléctrica K, tiene la expresión

$$V(x,y,z,t)=\frac{1}{K}\sum\frac{q(x',y',z',t)}{r}$$

y no como correspondería según la hipótesis de B. Riemann

$$V(x,y,z,t)=\frac{1}{K}\sum\frac{1}{r}q(x',y',z',t-r/a)$$

Lo que se propaga es una cualidad real: en los cuerpos conductores, es la corriente de conducción, en los cuerpos dieléctricos es la corriente de desplazamiento.

[‡] Para una dada potencia (fuerza) hay un dado potencial; y viceversa, para un dado potencial hay una dada potencia (fuerza), eso es bien sabido. De donde, en la teoría mecánica tradicional no se introduce nada nuevo como causa. El potencial es la principal causa para crear fuerzas. El llamado potencial *es la verdadera causa motriz*, pero las fuerzas sólo expresan la forma o la especie de la causa que las producen.

La consideración de los cuerpos dieléctricos es, además, uno de los puntos esencialmente nuevos de la teoría de Maxwell; ni B. Riemann ni C. Neumann hicieron referencia alguna a la polarización de los dieléctricos; para L. Lorenz, los cuerpos aislantes son simplemente cuerpos cuya resistencia específica es muy grande, cuerpos conductores muy malos ([*]) y es la *corriente de conducción* que se propaga en tales cuerpos que él asimila a las vibraciones luminosas.

Por el contrario, para Maxwell, la luz que se propaga en cuerpos transparentes consiste esencialmente en corrientes de desplazamiento producidos dentro de cuerpos dieléctricos.

Estas corrientes de desplazamiento, como sabemos, producen las mismas acciones ponderomotrices y electromotrices que las corrientes de conducción; pero su generación está sujeta a otra ley, y la invención de esta ley es una de las ideas más poderosas y fructíferas de Maxwell.

En un sistema donde se establece el equilibrio, los componentes *f, g, h* del desplazamiento están relacionados con las derivadas de la función electrostática potencial Ψ por las igualdades [Primera parte, igualdades (102)]

$$f=\frac{K}{4\pi}\frac{\delta\Psi}{\delta x}, \quad g=\frac{K}{4\pi}\frac{\delta\Psi}{\delta y}, \quad h=\frac{K}{4\pi}\frac{\delta\Psi}{\delta z}.$$

En un sistema que no está en equilibrio, las igualdades precedentes deben ser reemplazadas por

$$f=-\frac{K}{4\pi}E_y, \quad g=-\frac{K}{4\pi}E_y, \quad h=-\frac{K}{4\pi}E_z, \tag{121}$$

donde E_x, E_y, E_z son los componentes del campo eléctrico total, tanto del campo de inducción como del campo estático.

Veamos que esta idea surge naturalmente de las hipótesis permitidas por Maxwell con respecto a la constitución de los dieléctricos.

En este estudio, hemos reconocido que Maxwell fue guiado casi constantemente en sus suposiciones referidas a los dieléctricos, por las de Faraday y de Mossotti, que ellos mismos concibieron a imitación de las hipótesis magnéticas de Poisson. De acuerdo con estas hipótesis, un dieléctrico está formado por pequeñas masas conductoras, incrustadas en un cemento aislante. La acción de un campo electromotriz de inducción sobre un dieléctrico será, por lo tanto, el resultado de las acciones que este campo ejerce sobre una gran cantidad de conductores abiertos.

Ahora, en un conductor abierto, un campo eléctrico de inducción produce el mismo efecto que un campo eléctrico estático; obliga a que la electricidad se distribuya de tal manera que la carga

[*] La diferencia entre el punto de vista de Maxwell y el punto de vista de Lorenz, fue fuertemente marcada por una nota que adjuntó M. H. Valentinier a las obras científicas de este último (L. Lorenz, *Œuvres scientifiques*, revisadas y anotadas por H. Valentinier, tomo I, p. 204, nota 16).

positiva se acumule en un extremo del conductor y la carga negativa en el otro extremo; en otras palabras, este campo *polariza* al conductor abierto.

Maxwell insiste repetidamente en esta acción que un campo de inducción ejerce sobre un conductor abierto.

"Consideremos", escribió en su memoria *On Faraday's Lines of Force* ([*]), "un conductor lineal que no forma un circuito cerrado, supongamos que este conductor corta líneas de fuerza magnética, ya sea por el efecto de su propio movimiento, o por las variaciones del campo magnético. Una fuerza electromotriz actuará en la dirección del conductor, pero esta fuerza no podrá producir una corriente, porque el conductor no está cerrado, sólo producirá una tensión eléctrica en los extremos del conductor."

De este pasaje, Maxwell no extrae, por el momento, alguna conclusión relativa a la polarización de los dieléctricos, a la que no atribuye mucho en este primera memoria sobre la electricidad; pero en la memoria *On physical Lines of Force* es diferente.

"La experiencia nos enseña", escribió, ([**]) "que la tensión eléctrica es de la misma naturaleza, ya sea generada por electricidad estática o por electricidad galvánica: una fuerza electromotriz producida por galvanismo, tiene el mismo efecto que la que proporciona una bobina de inducción, por ejemplo, puede cargar una botella de Leiden."

"Si existe una diferencia de potencial entre las diversas partes de un cuerpo, la electricidad pasa o tiende a pasar de la parte donde el voltaje es mayor a la parte donde es más débil."

La aplicación de estas consideraciones a los pequeños cuerpos conductores contenidos en un dieléctrico es inmediata; ella impone conclusiones que Maxwell enuncia en estos términos ([***]):

"Cuando una fuerza electromotriz actúa sobre un dieléctrico, produce un estado de polarización de sus partículas similar a la distribución de la polaridad sobre las partículas del hierro que está sometido a la acción de un imán; al igual que la polarización magnética, este estado de polarización se puede representar como un estado donde cada partícula tiene dos polos de propiedades opuestas."

"Cuando un dieléctrico es sometido a inducción, podemos concebir que, en cada molécula, la electricidad se mueve de modo que uno de los extremos sea positivo y el otro extremo negativo, pero la electricidad permanece unida en su totalidad a cada molécula y no puede pasar de una molécula a otra."

El efecto de esta acción sobre la masa total del dieléctrico es producir un desplazamiento general de la electricidad en una determinada dirección ... La magnitud del desplazamiento depende de la

[*] *J. Clerk Maxwell,* Scientific Papers, *Vol. I, p. 186.*
[**] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, Vol. I, p. 490.
[***] J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 491.

naturaleza del cuerpo y la fuerza electromotriz, si *h* es el desplazamiento, *R* la fuerza electromotriz y *E* un coeficiente que depende de la naturaleza del dieléctrico, tenemos

$$\boldsymbol{R = -4\pi E^2 h} \ (^*);$$

y si *r* es el valor de la corriente eléctrica debido al desplazamiento

$$\boldsymbol{r = \frac{dh}{dt}}.$$

Las mismas ideas se encuentran, en una forma aún más clara, en las memoria: *A dynamical Theory of the electromagnetic Field.*

"Si un cuerpo se mueve a través de las líneas de fuerza magnética, sufre", escribió Maxwell ([**]), "lo que se llama una fuerza electromotriz: los dos extremos del cuerpo tienden a asumir un estado eléctrico opuesto y una corriente eléctrica tiende a circular a través del cuerpo. Si la fuerza electromotriz es lo suficientemente potente, y si se ejerce sobre ciertos cuerpos compuestos, los descompone, transporta uno de los componentes a un extremo del cuerpo y el otro componente al otro extremo."

"Estos hechos ponen en evidencia una fuerza; esta fuerza produce una corriente, a pesar de la resistencia; esta fuerza comunica electrizaciones opuestas a las dos extremidades del cuerpo, creando un estado que la acción de la fuerza electromotriz sola es capaz de mantener. En el momento en que esta fuerza deja de actuar, este estado tiende, por una fuerza igual y opuesta, a producir una contracorriente a través del cuerpo y llevarla a su estado eléctrico inicial; finalmente, cuando esta fuerza es lo suficientemente poderosa, destruye las partes de un compuesto químico y los lleva en direcciones opuestas, aunque estas partes tienen una tendencia natural a combinarse, y se combinan, precisamente, con una energía capaz de generar una fuerza electromotriz de sentido contrario."

"Tal es la fuerza a la que se somete un cuerpo cuando se mueve en un campo magnético o cuando ocurre algún cambio en este campo; esta fuerza tiene el efecto de producir en el cuerpo una corriente y una liberación de calor; o bien descomponer el cuerpo; o, finalmente, si ambos efectos son igualmente imposibles, poner el cuerpo en un estado de polarización eléctrica; este estado de polarización es un estado de tensión en el que los extremos opuestos del cuerpo se electrifican en sentidos contrarios; tan pronto como se elimina la fuerza perturbadora, el cuerpo reacciona y, por sí mismo, pierde este estado."

"... Cuando una fuerza electromotriz actúa en un circuito conductor, produce una corriente ... Pero cuando una fuerza electromotriz actúa en un dieléctrico, produce un estado de polarización de sus partes ..." y Maxwell, citando además a Faraday y a Mossotti, — cuyas ideas, obviamente,

[*] Sobre el tema del signo del segundo miembro, ver Primera parte, igualdad (42)

reproduce,— en su memoria *On physical Lines of Force*, con respecto a esta polarización dieléctrica, escribió el párrafo que citamos arriba.

Tales son, en su secuencia natural, las inducciones que llevaron a Maxwell a plantear las ecuaciones generales de polarización dieléctrica ([*])

$$f = -\frac{K}{4\pi} E_y, \quad g = -\frac{K}{4\pi} E_y, \quad h = -\frac{K}{4\pi} E_z. \tag{121}$$

En un medio homogéneo, los componentes E_x, E_y, E_z, del campo electromotriz están dados por las igualdades (82), de modo que las igualdades (121) se vuelven

$$\begin{cases} f = -\dfrac{K}{4\pi}\left(\dfrac{\delta\Psi}{\delta x} + \dfrac{\delta F}{\delta t}\right) \\ g = -\dfrac{K}{4\pi}\left(\dfrac{\delta\Psi}{\delta y} + \dfrac{\delta G}{\delta t}\right) \\ h = -\dfrac{K}{4\pi}\left(\dfrac{\delta\Psi}{\delta z} + \dfrac{\delta H}{\delta t}\right) \end{cases} \tag{122}$$

Además, en este caso, los componentes de la corriente de desplazamiento tienen valores

$$\overline{u} = \frac{\delta f}{\delta t}, \qquad \overline{v} = \frac{\delta g}{\delta t}, \qquad \overline{w} = \frac{\delta h}{\delta t}. \tag{3}$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{cases} \overline{u} = -\dfrac{K}{4\pi}\dfrac{\delta}{\delta t}\left(\dfrac{\delta\Psi}{\delta x} + \dfrac{\delta F}{\delta t}\right) \\ \overline{v} = -\dfrac{K}{4\pi}\dfrac{\delta}{\delta t}\left(\dfrac{\delta\Psi}{\delta y} + \dfrac{\delta G}{\delta t}\right) \\ \overline{w} = -\dfrac{K}{4\pi}\dfrac{\delta}{\delta t}\left(\dfrac{\delta\Psi}{\delta z} + \dfrac{\delta H}{\delta t}\right) \end{cases} \tag{123}$$

Estas ecuaciones son el fundamento de la teoría electromagnética de la luz

§4. *Primer borrador de la teoría electromagnética de la luz de Maxwell.*

Sin embargo, antes de desarrollar una teoría electromagnética de la luz basada en estas ecuaciones, Maxwell había obtenido las dos leyes esenciales de esta teoría por un método

[*] J. Clerk Maxwell, *A dynamical Theory of the electromagnetic Field*, (*Scientific Papers*, Vol. I, p. 560), *traité d'Electricité et Magnétisme*, Vol. II, p. 287).

completamente diferente. Este método, estrechamente relacionado con las hipótesis mecánicas, lo expuso en la memoria: *On physical Lines of Force*.

Hemos visto (Primera Parte, Capítulo III) cómo en esta memoria Maxwell representa la acción de un campo electromotriz sobre un dieléctrico. La fuerza electromotriz se asimila a una tracción que se ejerce sobre las paredes perfectamente elásticas de las células del dieléctrico. Si R es el campo electromotriz, las paredes experimentan un desplazamiento en la dirección de este campo, el valor medio por unidad de volumen de este desplazamiento, que él denota con la letra h, está relacionado con el campo electromotriz R por la relación[Primera parte, igualdad (42 bis)]

$$\boldsymbol{R} = -4\pi \boldsymbol{E}^2 \boldsymbol{h}$$

E^2 es una cantidad que depende de la elasticidad de las paredes celulares.

Sin discutir, desde el punto de vista de la teoría de la elasticidad, la solución del problema tratado por Maxwell, nos limitaremos a indicar la relación que existe, según él, entre E^2 y los coeficientes de elasticidad de la sustancia.

Maxwell expresa ([*]) E^2 como una función de dos coeficientes que denota por μ y m y que, para evitar ciertas confusiones, denotaremos por μ' y m; esta expresión es la siguiente:

$$\boldsymbol{E}^2 = \pi \boldsymbol{m} \frac{9\mu'}{3\mu' + 5\boldsymbol{m}}. \tag{124}$$

El coeficiente μ' se define ([**]) como la relación entre la presión y la contracción cúbica en un cuerpo uniformemente comprimido; por lo tanto, es lo opuesto a lo que se suele llamar el coeficiente de compresibilidad cúbica. Si denotamos por Λ y M los coeficientes que Gabriel Lamé denotó por λ y μ, tendremos ([***])

$$\mu' = \frac{3\Lambda + 2\mathrm{M}}{3}. \tag{125}$$

En cuanto al coeficiente m, al comparar ([‡]) las ecuaciones de Maxwell con las de Lamé, encontramos inmediatamente

$$\boldsymbol{m} = 2\mathrm{M}. \tag{126}$$

En virtud de las igualdades (125) y (126), la igualdad (124) se puede escribir

---

[*] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, Vol. I, p. 495, igualdad (107)

[**] J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 493, igualdad (80). Para establecer esta igualdad con el resto de la exposición de Maxwell, se debe cambiar el signo del segundo miembro.

[***] G. Lamé, *Leçons sur l'élasticité*, 2ª edición, p. 74, igualdad (*a*)

[‡] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, Vol. I, p. 493, igualdad (83) y G. Lamé, *Loc. cit.*, p. 65, igualdad (1).

(127) $$E^2 = \pi m \frac{3\Lambda + 2\mathrm{M}}{\Lambda + 4\mathrm{M}}\,.$$

Si admitimos la teoría de la elasticidad molecular, tal como la enunció Poisson tendremos, como sabemos, la igualdad

(128) $$\Lambda = \mathrm{M}$$

Por lo que la igualdad (127) se convierte en

(129) $$E^2 = \pi m$$

que Maxwell aceptó (*) para el desarrollo ulterior de su teoría.

Según esta teoría, dos cargas eléctricas cuyos valores en unidades electromagnéticas son q_1, q_2, se repelen a una distancia r con una fuerza [Primera Parte, igualdad (78)]

(130) $$F = E^2 \frac{q_1 q_2}{r^2}\,,$$

E^2 tiene el valor apropiado para el dieléctrico interpuesto.

Si este dieléctrico es el vacío, el valor de E^2 puede obtenerse de los famosos experimentos de Weber y Kohlrausch; luego encontramos (**) que E es una magnitud del mismo tipo que una velocidad, cuyo valor numérico es

(131) $$E = 310740 \times 10^6 \,\frac{mm}{s}$$

Habiendo llegado a este punto, Maxwell continúa (***) en estos términos:

"Encontrar la velocidad de propagación de las vibraciones transversales en el medio elástico que forman las células, suponiendo que la elasticidad se deba enteramente a las fuerzas que actúan entre las moléculas tomadas de dos en dos (†)."

"Por el método ordinario, sabemos que

(132) $$V = \sqrt{\frac{m}{\rho}}$$

---

* J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, Vol. I, p. 495, igualdad (108).

** J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 499, igualdad (131).

*** J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 499.

† Por estas palabras, Maxwell se refiere a la teoría molecular de Poisson.

m designa el coeficiente de elasticidad transversal y ρ la densidad."

La densidad que debe figurar en esta fórmula es la densidad del medio elástico que forma las paredes de las células; sin previo aviso de esta transposición, Maxwell supone que ρ denota la densidad del fluido que llena las células y luego admite la relación

$$\mu = \pi\rho \tag{133}$$

que ha sido llevado para establecer (*) la relación entre esta densidad y la permeabilidad magnética μ. Luego encontró

$$\mu V^2 = \pi m$$

o, en virtud de la igualdad (129)

$$E = V\sqrt{\mu} \quad . \tag{134}$$

Él comentó así estos resultados:

"En el vacío o en el aire, $\mu = 1$, en consecuencia

$$V = E$$

$$= 310740 \times 10^6 \; mm/s$$

$$= 193088 \; millas/s.$$

"La velocidad de la luz en el aire, determinada por Fizeau, es de 70.843 leguas por segundo (25 leguas al grado)‡, lo que da

$$V = 314.858 \times 10^6 \; mm/s$$

$$= 195.647 \; millas/s.$$

"La velocidad de propagación de las ondulaciones transversales en nuestro medio hipotético, calculada a partir de los experimentos electromagnéticos de los señores Kohlrausch y Weber, concuerda exactamente con la velocidad de la luz calculada mediante los experimentos ópticos de M. Fizeau, por lo que sería difícil para nosotros no hacer esta suposición: *La luz consiste en ondulaciones transversales de este mismo medio que es la causa de los fenómenos eléctricos y magnéticos*."

* J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, pp. 456 y 457.

‡ Se trata de *leguas marinas*, 1 legua marina = 5555 *m*. Esta medida de longitud es distinta de la *legua común* o castellana, equivalente a 5572,7 *m*. (*N. del T.*)

La capacitancia de un condensador plano de superficie *S*, cuyas armaduras están separadas por un espesor θ de un dieléctrico dado 1, tiene el valor [Primera Parte, igualdad (87)]

$$C_1 = \frac{1}{4\pi E_1^2}\frac{S}{\theta}.$$

Si el espacio entre las dos placas del condensador es el vacío, este capacitor también tiene la capacidad

$$C = \frac{1}{4\pi E^2}\frac{S}{\theta}.$$

La relación

$$D_1 = \frac{C_1}{C}$$

es, por definición, el poder inductivo específico del dieléctrico 1. Por lo tanto tenemos

$$D_1 = \frac{E^2}{E_1^2}$$

o bien, en virtud de la igualdad (134)

(135) $$D_1 = \frac{V^2}{V_1^2}\frac{1}{\mu_1}.$$

"Como resultado (*) el poder inductor de un dieléctrico es directamente proporcional al cuadrado del índice de refracción e inversamente proporcional al poder inductor magnético."

Así, ya en 1862, antes de que se publicara la nota de Bernhard Riemann, mientras las teorías de L. Lorenz y de C. Neumann aún no habían sido concebidas, Maxwell ya estaba en posesión de las leyes esenciales de la teoría electromagnética de la luz. Desafortunadamente, el método por el cual había tenido éxito, muy diferente del que él propuso después, estaba viciado por un grave error material. En virtud de la igualdad (126), la igualdad (132) se convertiría en

$$V = \sqrt{\frac{2\mathrm{M}}{\rho}},$$

fórmula incorrecta que se debe sustituir por la igualdad (*)

* J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 501.
* G. Lamé, *Leçons sur l'élasticité*, 2ª edición, p. 142, igualdad (9).

$$V = \sqrt{\frac{\mathrm{M}}{\rho}}\,.$$

§5. *Forma definitiva de la teoría electromagnética de la luz de Maxwell.*

Dos veces Maxwell expuso, con variaciones de detalle, la teoría electromagnética de la luz en una forma precisa y desprovista de hipótesis mecánicas: una primera vez ([**]), en la memoria: *A dynamical Theory of the electromagnetic Field*; y la segunda vez ([***]), en el *Traité d'Électricité et de Magnétisme*.

Tomemos el sistema de Maxwell de seis ecuaciones

(31)
$$\begin{cases} \dfrac{\delta\gamma}{\delta y} - \dfrac{\delta\beta}{\delta z} = -\,4\pi\left(u + \overline{u}\right), \\ \dfrac{\delta\alpha}{\delta z} - \dfrac{\delta\gamma}{\delta x} = -\,4\pi\left(v + \overline{v}\right), \\ \dfrac{\delta\beta}{\delta x} - \dfrac{\delta\alpha}{\delta y} = -\,4\pi\left(w + \overline{w}\right), \end{cases}$$

(80bis)
$$\begin{cases} \dfrac{\delta H}{\delta y} - \dfrac{\delta G}{\delta z} = -\,\mu\alpha\,, \\ \dfrac{\delta F}{\delta z} - \dfrac{\delta H}{\delta x} = -\,\mu\beta\,, \\ \dfrac{\delta G}{\delta x} - \dfrac{\delta F}{\delta y} = -\,\mu\gamma\,. \end{cases}$$

usando la ecuación

(81bis)
$$\frac{\delta F}{\delta x} + \frac{\delta G}{\delta y} + \frac{\delta H}{\delta z} = J$$

y suponiendo que el medio es homogéneo, obtendremos fácilmente las tres ecuaciones

(136)
$$\begin{cases} \Delta F = \dfrac{\delta J}{\delta x} = -\,4\pi\mu\left(u + \overline{u}\right), \\ \Delta G = \dfrac{\delta J}{\delta y} = -\,4\pi\mu\left(v + \overline{v}\right), \\ \dfrac{\Delta H}{\delta x} = \dfrac{\delta J}{\delta z} = -\,4\pi\mu\left(w + \overline{w}\right). \end{cases}$$

[**] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, Vol. I, pp. 577 a 588.
[***] J. Clerk Maxwell, *Traité d'Electricité et de Magnétisme*, traducción francesa, t. II, pp. 485 a 504.

Estas ecuaciones son generales. Supongamos ahora el medio no es conductor, sino que es dieléctrico; tendremos

$$u = 0\,, \qquad v = 0\,, \qquad w = 0\,,$$

mientras que $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ estarán dadas por las igualdades (123). Por lo tanto, las igualdades (136) se convertirán

$$(137) \qquad \begin{cases} \Delta F - K\mu \dfrac{\delta^2 F}{\delta t^2} = \dfrac{\delta J}{\delta x} + K\mu \dfrac{\delta^2 \Psi}{\delta x \delta t}\,, \\ \Delta G - K\mu \dfrac{\delta^2 G}{\delta t^2} = \dfrac{\delta J}{\delta y} + K\mu \dfrac{\delta^2 \Psi}{\delta y \delta t}\,, \\ \Delta H - K\mu \dfrac{\delta^2 H}{\delta t^2} = \dfrac{\delta J}{\delta z} + K\mu \dfrac{\delta^2 \Psi}{\delta z \delta t}\,. \end{cases}$$

Junto a las igualdades (80bis), estas relaciones nos dan, en primer lugar, las igualdades

$$(138) \qquad \begin{cases} \Delta\alpha - K\mu \dfrac{\delta^2 \alpha}{\delta t^2} = 0\,, \\ \Delta\beta - K\mu \dfrac{\delta^2 \beta}{\delta t^2} = 0\,, \\ \Delta\gamma - K\mu \dfrac{\delta^2 \gamma}{\delta t^2} = 0\,. \end{cases}$$

Estas tres ecuaciones, cuya forma es bien conocida, nos enseñan que en un dieléctrico homogéneo, los tres componentes α, β, γ del campo magnético, de acuerdo con las igualdades (80bis), verifican la relación

$$(139) \qquad \frac{\delta\alpha}{\delta x} + \frac{\delta\beta}{\delta y} + \frac{\delta\gamma}{\delta z} = 0$$

que caracteriza a los componentes de una vibración transversal que se propaga con una velocidad

$$(140) \qquad V = \sqrt{\frac{1}{K\mu}}\,.$$

La serie de las deducciones de Maxwell es diferente en las memorias: A *dynamical Theory of the electromagnetic Field* y en el *Traité d'Electricité et de Magnétisme*. En primer lugar, adjuntemos a los razonamientos expuestos en este último, que son más correctos.

Derivando la primera igualdad (137) con respecto a *x*, la segunda con respecto a *y*, la tercera con respecto a *z* y sumando miembro a miembro los resultados obtenidos; teniendo en cuenta la igualdad (81bis); encontramos

(141) $$K\mu\left(\frac{\delta}{\delta t}\Delta\Psi+\frac{\delta^2 J}{\delta t^2}\right)=0\,.$$

Por otra parte, la igualdad (103) de la Primera Parte nos enseña que, en un medio homogéneo, la densidad eléctrica *e* está dada por la igualdad

(142) $$K\Delta\Psi+4\pi e=0\,.$$

y la igualdad

(19) $$\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta w}{\delta z}+\frac{\delta e}{\delta t}=0$$

nos muestra que, en un medio no conductor, se cumple

$$u=0\,,\qquad v=0\,,\qquad w=0\,,$$

la igualdad

(143) $$\frac{\delta e}{\delta t}=0\,.$$

Las igualdades (141), (142) y (143), dan

(144) $$\frac{\delta^2 J}{\delta t}=0\,.$$

"Así que (*) *J* debe ser una función lineal de *t*, o una constante, o cero, y no tenemos que tomar en cuenta ni a *J*, ni a Ψ, si consideramos las perturbaciones periódicas". Y las ecuaciones (137) se convierten, de acuerdo con Maxwell (**),

(145) $$\begin{cases}\Delta F-K\mu\dfrac{\delta^2 F}{\delta t^2}=0\,,\\[2mm] \Delta G-K\mu\dfrac{\delta^2 G}{\delta t^2}=0\,,\\[2mm] \Delta H-K\mu\dfrac{\delta^2 H}{\delta t^2}=0\,.\end{cases}$$

La oración de Maxwell que citamos, exacta con respecto a la función *J*, no es así para la función Ψ; pero, sin apartarse mucho del pensamiento esencial de Maxwell, uno podría razonar de la siguiente manera:

* J. Clerk Maxwell, *Traité d'Electricité et de Magnétisme*, traducción francesa, t. II, p. 488.
** J. Clerk Maxwell, *Loc. cit.*, p. 488, ecuaciones (9).

Derivando dos veces las igualdades (137) con respecto a t y teniendo en cuenta la igualdad (144) y la igualdad

$$\frac{\delta}{\delta t}\Delta\Psi = 0\,,$$

que se deriva de las igualdades (142) y (143) y que da

$$\Delta\frac{\delta^2\Psi}{\delta x\delta t} = 0\,, \qquad \Delta\frac{\delta^2\Psi}{\delta y\delta t} = 0\,, \qquad \Delta\frac{\delta^2\Psi}{\delta z\delta t} = 0\,.$$

podemos escribir los resultados obtenidos

$$\begin{aligned}
\Delta\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta\Psi}{\delta x}+\frac{\delta F}{\delta t}\right) - K\mu\frac{\delta^3}{\delta t^3}\left(\frac{\delta\Psi}{\delta x}+\frac{\delta F}{\delta t}\right) = 0\,,\\
\Delta\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta\Psi}{\delta y}+\frac{\delta G}{\delta t}\right) - K\mu\frac{\delta^3}{\delta t^3}\left(\frac{\delta\Psi}{\delta y}+\frac{\delta G}{\delta t}\right) = 0\,,\\
\Delta\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta\Psi}{\delta z}+\frac{\delta H}{\delta t}\right) - K\mu\frac{\delta^3}{\delta t^3}\left(\frac{\delta\Psi}{\delta z}+\frac{\delta H}{\delta t}\right) = 0\,.
\end{aligned}$$

o bien, en virtud de las igualdades (123)

$$\text{(146)} \qquad \begin{cases}
\Delta\overline{u} - K\mu\dfrac{\delta^2\overline{u}}{\delta t^2} = 0\,,\\
\Delta\overline{v} - K\mu\dfrac{\delta^2\overline{v}}{\delta t^2} = 0\,,\\
\Delta\overline{w} - K\mu\dfrac{\delta^2\overline{w}}{\delta t^2} = 0\,.
\end{cases}$$

Además, en virtud de la igualdad (25), en un medio no conductor donde

$$u = 0\,, \qquad v = 0\,, \qquad w = 0\,,$$

los componentes $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, de la corriente de desplazamiento satisfacen la igualdad

$$\text{(147)} \qquad \frac{\delta\overline{u}}{\delta x}+\frac{\delta\overline{v}}{\delta y}+\frac{\delta\overline{w}}{\delta z} = 0\,.$$

Entonces, en un medio no conductor, las corrientes de desplazamiento son corrientes transversales que se propagan con velocidad

$$\text{(140)} \qquad V = \sqrt{\frac{1}{K\mu}}\,.$$

El análisis anterior se basa esencialmente en el uso de las igualdades (19) y (25), que son consecuencias naturales de la *tercera electrostática* de Maxwell; pero no podríamos esperar encontrarlas en la memoria: *A dynamical Theory of the electromagnetic Field*; donde este análisis es reemplazado por otro que sería más difícil hacerlo exacto.

Maxwell determinó una función X, análoga a la función X dada por la igualdad (108), que luego consideró en su Tratado, como

$$\Delta \mathrm{X} = J \,. \tag{148}$$

Él escribió

$$\begin{cases} F = F' + \dfrac{\delta \mathrm{X}}{\delta x}, \\ G = G' + \dfrac{\delta \mathrm{X}}{\delta y}, \\ H = H' + \dfrac{\delta \mathrm{X}}{\delta z}. \end{cases} \tag{109}$$

Las igualdades (81bis), (148) y (109), dan visiblemente

$$\frac{\delta F'}{\delta x} + \frac{\delta G'}{\delta y} + \frac{\delta H'}{\delta z} = 0 \,. \tag{149}$$

de modo que F', G', H' se pueden considerar como *la parte transversal del estado electrotónico* del cual F, G, H son los componentes.

Por medio de las igualdades (109), las igualdades (137) se vuelven

$$\begin{cases} \Delta F' - K\mu \dfrac{\delta^2 F'}{\delta t^2} = K\mu \dfrac{\delta}{\delta x}\left(\dfrac{\delta \Psi}{\delta t} + \dfrac{\delta^2 \mathrm{X}}{\delta t^2}\right), \\ \Delta G' - K\mu \dfrac{\delta^2 G'}{\delta t^2} = K\mu \dfrac{\delta}{\delta y}\left(\dfrac{\delta \Psi}{\delta t} + \dfrac{\delta^2 \mathrm{X}}{\delta t^2}\right), \\ \Delta H' - K\mu \dfrac{\delta^2 H'}{\delta t^2} = K\mu \dfrac{\delta}{\delta z}\left(\dfrac{\delta \Psi}{\delta t} + \dfrac{\delta^2 \mathrm{X}}{\delta t^2}\right). \end{cases} \tag{150}$$

Derivando, respectivamente, estas igualdades con respecto a x, y y z y agregando miembro a miembro los resultados obtenidos teniendo en cuenta la igualdad (149); encontramos

(151)
$$\Delta\left(\frac{\delta\Psi}{\delta t}+\frac{\delta^2 X}{\delta t^2}\right)=0\,.$$

Maxwell hizo este cálculo ([*]); pero en vez de concluir en la igualdad (151) concluyó en una igualdad que no es correcta:

(152)
$$\left(\frac{\delta\Psi}{\delta t}+\frac{\delta^2 X}{\delta t^2}\right)=0\,.$$

Haciendo uso de esta igualdad (152), transforma las igualdades (150) en

(153)
$$\begin{cases}\Delta F'-K\mu\dfrac{\delta^2 F'}{\delta t^2}=0\,,\\ \Delta G'-K\mu\dfrac{\delta^2 G'}{\delta t^2}=0\,,\\ \Delta H'-K\mu\dfrac{\delta^2 H'}{\delta t^2}=0\,.\end{cases}$$

La parte transversal del estado electrotónico se propaga con una velocidad

(140)
$$V=\sqrt{\frac{1}{K\mu}}\,.$$

Además, las igualdades (148) y (152) dan

$$\frac{\delta}{\delta t}\Delta\Psi+\frac{\delta^2 J}{\delta t^2}=0$$

y como $\Delta\Psi$, en un medio homogéneo, es proporcional [Primera Parte, igualdades (57) y (57bis)] a la densidad *e* de la electricidad libre. se encuentra que $\delta^2 J/dt^2$ es proporcional a de/dt.

"Como el medio es un aislante perfecto", escribió Maxwell ([*]), "la densidad *e* de la electricidad libre es invariable"; esta afirmación no se deriva lógicamente de la electrostática admitida en su trabajo *A dynamical Theory of the electromagnetic Field* ; Sin embargo, Maxwell se adhiere a ella y admite que d^2J/dt^2 es necesariamente nula y concluye que una perturbación eléctrica periódica no puede corresponder a un valor de *J* diferente de 0.

La segunda electrostática de Maxwell es, por lo tanto, menos adecuada para el desarrollo de la teoría electromagnética de la luz que la tercera electrostática del mismo autor.

[*] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, Vol. I, p. 58, igualdad (77).
[*] J. Clerk Maxwell, *Scientific Papers*, Vol. I, p. 582.

Hay dos puntos en los que ([**]) todos las electrostáticas de Maxwell están de acuerdo.

En primer lugar, dos cargas eléctricas q_1 y q_2 colocadas a una distancia r entre sí dentro de un cierto dieléctrico 1 se repelen con una fuerza [Primera Parte, igualdades (78) y (83)]

$$F = \frac{1}{K_1}\frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

En segundo lugar, un capacitor plano cuyas placas de área S están separadas por un grosor θ del mismo dieléctrico tiene una capacitancia [Primera Parte, igualdad (87)]

$$C = \frac{K_1}{4\pi}\frac{S}{\theta}.$$

Estas dos igualdades, unidas a la igualdad (140), restauran inmediatamente estas dos leyes, ya obtenidas por Maxwell, en su memoria *On physical Lines of Force*:

1ª Ley. *En el vacío, las corrientes de desplazamiento transversales se propagan con la misma velocidad que la luz.*

2ª Ley. *El poder inductor específico con respecto al vacío se relaciona con las velocidades de propagación V_1 y V de las corrientes de desplazamiento transversales en un dieléctrico y en el vacío, y con la permeabilidad magnética μ_1 del dieléctrico por la relación*

(135) $$D_1 = \frac{V^2}{V_1^2}\frac{1}{\mu_1}.$$

Estas son las dos leyes esenciales de la teoría electromagnética de la luz.

[**] Para reconocer este acuerdo, debe recordarse que la misma cantidad se llama K aquí y en el *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, $1/E^2$ en la memoria: *On physical Lines of Force* y $4\pi/K$ en la memoria: *A dynamical Theory of the electromagnetic Field*.

CONCLUSIÓN

La teoría electromagnética de la luz conecta felizmente dos disciplinas anteriormente distintas, satisface tan completamente la necesidad, a menudo manifestada por los físicos, de establecer un enfoque óptico de la teoría eléctrica, que muy pocas personas estarían de acuerdo hoy. en considerarlo como nulo e inválido.

Por otra parte, a menos que estemos cegados por una admiración por parcialidad, no podemos desconocer las incoherencias e inconsistencias que hacen que el razonamiento de Maxwell sea inaceptable para una mente justa; estas incoherencias, no son, en el trabajo del físico inglés, defectos de menor importancia y fáciles de corregir; ilustres geómetras han tratado de poner orden en este trabajo y han tenido que renunciar a ello.

¿Qué curso de acción podemos tomar, dado que no podemos resolver ni para dar un valor demostrativo al razonamiento de Maxwell ni para abandonar la teoría electromagnética de la luz?

Muchos físicos hoy buscan una alternativa como la que ha sido adoptada por O. Heaviside ([*]), por H, Hertz ([**]), por E. Cohn ([***]), de los cuales Hertz ([†]) formuló claramente el principio y reivindicó la legitimidad:

Dado que los razonamientos y cálculos por los cuales Maxwell desarrolló su teoría de la electricidad y el magnetismo están en todo momento comprometidos por contradicciones no accidentales, no fáciles de corregir, sino esenciales e inseparables de todo el trabajo, dejemos de lado estos argumentos y cálculos. Tomemos simplemente las ecuaciones a las que han llevado a Maxwell, y sin tener en cuenta los procesos mediante los cuales se obtuvieron estas ecuaciones, aceptémoslos como hipótesis fundamentales, como postulados sobre los que basaremos todo el edificio de las teorías eléctricas. Así guardaremos, si no todos los pensamientos que han agitado la mente de Maxwell, al menos todo lo que es esencial e indestructible en estos pensamientos, porque "lo que es esencial en las teorías de Maxwell son las ecuaciones de Maxwell.

¿Es correcto dejar de lado las viejas teorías eléctricas y las nuevas teorías por las cuales Maxwell llegó a estas ecuaciones y tomar estas ecuaciones de forma pura y simple como el punto de partida de una nueva doctrina?

---

[*] O. Heaviside. "On the electromagnetic Wawe-surface", (*Philosophical Magazine*, 5ª serie, vol. XIX, p. 397 ; 1885. — *Heaviside's electrical Papers*, vol. II, p. 8). — "On electromagnetic Waves, especially in Relation to the Vorticity of the impressed Forces; and the forced Vibrations of electromagnetic Systems", (*Philosophical magazine*, 5ª serie, vol. XXV, p. 130; 1888. — *Electrical papers*, vol. II, p. 375).

[**] H. Hertz. "Ueber die Grundgleichungen der Elehtrodynamik für ruhende Korper", (*Wiedemann's Annalen*. Bd. XL, p. 577; 1890. — *Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft*, p. 208; 1894).

[***] E. Cohn. Zur Systematik der Elektricitcitslehre (Wiedemann's Annalen, Bd. XL, p. 625; 1890).

[†] H. Hertz. *Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft*. Einleitende Uebersicht, p. 21.

Un algebrista siempre tiene el derecho de tomar cualquier grupo de ecuaciones y combinar estas ecuaciones entre sí de acuerdo con las reglas de cálculo. Las letras que tienen algunas relaciones estarán involucradas en otras relaciones que son algebraicamente equivalentes a las primeras.

Pero un físico no es un algebrista; una ecuación no solo lleva, para él, letras; estas letras simbolizan cantidades físicas que deben ser o medibles experimentalmente, o formadas por otras cantidades mensurables. Si, entonces, nos contentamos con darle una ecuación a un físico, no le enseñamos nada en absoluto; A esta ecuación debe agregarse la indicación de las reglas por las cuales las letras con las que se relaciona la ecuación corresponderán a las magnitudes físicas que representan. Ahora, estas reglas, lo que las hacen conocer, son el conjunto de hipótesis y razonamientos por los cuales llegamos a las ecuaciones en cuestión; es la teoría que en estas ecuaciones se resumen en forma simbólica: en Física, una ecuación, separada de la teoría que la condujo, no tiene sentido.

Según H. Hertz, las teorías son idénticas cuando conducen a las mismas ecuaciones. A esta pregunta ([*]): "¿Cuál es la teoría de Maxwell?" No conozco una respuesta más corta y más precisa que esta: "La teoría de Maxwell es el sistema de ecuaciones de Maxwell." Cualquier teoría que conduzca a las mismas ecuaciones, y, en consecuencia, abarque el mismo conjunto de fenómenos posibles, lo consideraré como una forma o un caso particular de la teoría de Maxwell; cualquier teoría que conduzca a otras ecuaciones, y por lo tanto anticipe la posibilidad de otros fenómenos, será, para mí, otra teoría."

Este criterio no puede ser suficiente para juzgar la equivalencia de dos teorías; para ser equivalentes, no es suficiente que las ecuaciones que proponen sean literalmente idénticas; también es necesario que las letras que aparecen en estas ecuaciones representar cantidades relacionadas de la misma manera a cantidades mensurables; y para asegurarse de este último carácter, no es suficiente comparar las ecuaciones, es necesario comparar los razonamientos y las hipótesis que constituyen las dos teorías.

Por lo tanto, podemos adoptar las ecuaciones de Maxwell sólo si las alcanzamos como consecuencia de una teoría sobre fenómenos eléctricos y magnéticos; y dado que estas ecuaciones no concuerdan con la teoría clásica resultante del trabajo de Poisson, será necesario rechazar la teoría clásica, romper con la doctrina tradicional, y crear con nuevas nociones y nuevas hipótesis, una nueva teoría de la electricidad y el magnetismo.

Esto es lo que ha hecho el Sr. L. Boltzmann.

En un libro publicado entre 1891 y 1893 ([*]), intentó un esfuerzo prodigioso para olvidar las doctrinas que nos enseñó la tradición y el uso, para construir, por medio de concepciones

[*] H. Hertz, *Abhandlungen über die Aushreitung der elektrischen Kraft. Einleitende Uebersicht*, p. 23.

[*] L.Boltzmann, *Vorlesungen über Maxwell's Théorie der Elektricität und des Lichtes*. I[e] Theil: *Ableitung der Grundgleichungen für ruhende, homogène, isotrope Körper*. — II[e] Theil: *Verhaltniss zur Fernwirkungs-theorie; specielle Falle der Elektrostatik, stationaren Strömung und Induction.* Leipzig, 1891–1893.

completamente nuevas, un sistema en el cual las ecuaciones de Maxwell estaban lógicamente encadenadas.

No se puede negar, de hecho, que este trabajo establece un vínculo irreprochable entre las diversas ecuaciones escritas por Maxwell en su *Treatise on Electricity and Magnetism*. Las contradicciones y los paralogismos que Maxwell disfrutó con demasiada frecuencia para sembrar el camino a estas ecuaciones han sido cuidadosamente descartados. ¿Significa esto que la teoría así construida ya no se presta a la crítica y satisface todos los deseos de los físicos? Lejos de eso. Por lo tanto, la electrostática del Sr. L. Boltzmann no es más que la tercera electrostática de Maxwell; al igual que esta última, no parece estar de acuerdo con las acciones que los conductores electrificados tienen sobre los dieléctricos. El magnetismo, imitado de las memorias de Maxwell, no parece estar identificado con las doctrinas fructíferas de D. Poisson, F. E. Neumann, W. Thomson, G. Kirchhoff, doctrinas que Maxwell mismo había repetido en su *Treatise*.

Si, para alcanzar lógicamente a las ecuaciones de Maxwell, seguimos los métodos propuestos por el Sr. L Boltzmann, nos veremos obligados a abandonar en parte el trabajo de Poisson y sus sucesores en la distribución de electricidad y magnetismo, es decir, una de las partes más precisas y útiles de la Física matemática.

Por otra parte, para salvar estas teorías, ¿deberíamos renunciar a todas las consecuencias de la doctrina de Maxwell y, en particular, la más seductora de estas consecuencias, a la teoría electromagnética de la luz? Como el Sr. Poincaré comentó en alguna parte, sería difícil resolverlo.

Encerrado en este dilema: o bien abandonar la teoría tradicional de distribución eléctrica y magnética, o abandonar la teoría electromagnética de la luz, ¿no podrían los físicos adoptar una tercera? ¿No podrían imaginar una doctrina en la cual, la vieja electrostática, el viejo magnetismo y la nueva doctrina de la propagación de las acciones eléctricas en los medios dieléctricos se reconcilien lógicamente?

Esta doctrina existe; es una de las obras más bellas de Helmholtz ([**]); una extensión natural de las doctrinas de Poisson, Ampère, Weber y Neumann, lógicamente va de principios establecidos a principios del siglo XIX a las consecuencias más seductoras de las teorías de Maxwell, de las leyes de Coulomb a la teoría electromagnética de la luz, Sin perder ninguna de las conquistas recientes de la ciencia eléctrica, restaura la continuidad de la tradición.

[**] H. v. Helmholtz. Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektrodynamik fur ruhende leitende Kôrper (*Borchardt's Journal fur reine und angewandte mathematik,* Bd. LXXII, p. 57, 1870. — *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bd. I, p. 543).

TABLA DE MATERIAS

Primera parte: LES THEORIES ELECTRIQUES DE J. CLERK MAXWELL.

CAPÍTULO I. Las propiedades fundamentales de los dieléctricos — Las doctrinas de Faraday y Mossotti.

§1. *La teoría de la imantación por influencia, precursora de la teoría de los dieléctricos* 49
§2. *La polarización de los dieléctricos* 54
§3. *Proposiciones esenciales de la teoría de los dieléctricos.* 60
§4. *La idea particular de Faraday* 66

CAPÍTULO II. La primera teoría electrostática de Maxwell.

§1, *Recordando la teoría de la conductibilidad del calor.* 71
§2. *Teoría de los medios dieléctricos, construida por analogía con la teoría de la conducción de calor* 73
§3. *Discusión de la primera electrostática de Maxwell* 76

CAPÍTULO III. La segunda electrostática de Maxwell.

§1. *La hipótesis de las células eléctricas.* 79
§2. *Los principios anteriores en los escritos posteriores de Maxwell.* 82
§3. *La ecuación de la electricidad libre.* 84
§4. *La segunda electrostática de Maxwell es ilusoria.* 87
§5. *Determinación de la energía electrostática.* 90
§6. *De las fuerzas que se ejercen entre dos pequeños cuerpos electrizados.* 94
§7. *De la capacitancia de un condensador.* 99

CAPÍTULO IV. La tercera electrostática de Maxwell.

§1. *Diferencia esencial entre la segunda y la tercera electrostática de Maxwell.* 102
§2. *Desarrollo de la tercera electrostática de Maxwell.* 112

Segunda parte: LA ELECTRODINÁMICA DE MAXWELL

CAPÍTULO I. Corriente de conducción y corriente de desplazamiento.

§1. *De la corriente de conducción.* 117
§2. *Sobre la corriente de desplazamiento* 118
§3. *En la teoría de Maxwell, ¿la corriente total es una corriente uniforme*? 121
§4. *Volviendo a la tercera electrostática de Maxwell, ¿qué tanto podemos estar de acuerdo con la electrostática convencional?*

129

CAPÍTULO II. Las seis ecuaciones de Maxwell y la energía electromagnética.

§1. *Las tres ecuaciones de Maxwell y las componentes de la corriente.* 137

§2. *El estado electrotónico y el potencial magnético en la memoria: On Faraday's Lines of Force.* 140

§3. *Examen de la teoría precedente.* 146

§4. *El estado electrotónico y la energía electromagnética en la memoria: On Physical Lines of Force.* 150

§5. *El estado electrotónico y la energía electromagnética en la memoria. A dynamical theory of the electromagnetic field.* 159

§6. *La teoría del Magnetismo en el Treatise on Electricity and Magnetism.* 167

§7. *La teoría del electromagnetismo en el Treatise on Electricity and Magnetism.* 172

CAPÍTULO III. La teoría electromagnética de la luz.

§1. *La velocidad de la luz y la propagación de las acciones eléctricas; investigaciones de W. Weber y de G. Kirchhoff.* 79

§2. *La velocidad de la luz y la propagación de acciones eléctricas; investigación de B. Riemann, C, Neumann y L. Lorenz.* 183

§3. *La hipótesis fundamental de Maxwell – Polarización electrodinámica de los dieléctricos* 191

§4. *Primer borrador de la teoría electromagnética de la luz de Maxwell.* 196

§5. *Forma definitiva de la teoría electromagnética de la luz de Maxwell.* 201

CONCLUSIÓN 208

SOBRE LAS LÍNEAS DE FUERZA DE FARADAY

JAMES CLERK MAXWELL

El estado actual de la ciencia eléctrica parece peculiarmente desfavorable a la especulación. Las leyes de la distribución de electricidad sobre la superficie de los conductores se han deducido analíticamente de los experimentos; algunas partes de la teoría matemática del magnetismo están establecidas, mientras que en otros aspectos los datos experimentales son insuficientes; la teoría de la conducción del galvanismo y la de la atracción mutua de los conductores se han reducido a fórmulas matemáticas, pero no han establecido una relación con las otras partes de la ciencia. Ahora no se puede plantear ninguna teoría eléctrica, a menos que muestre la conexión no solo entre la electricidad en reposo y la corriente eléctrica, sino entre las atracciones y los efectos inductivos de la electricidad en ambos estados.Tal teoría debe satisfacer con precisión aquellas leyes, cuya forma matemática es conocida, y debe proporcionar los medios para calcular los efectos en los casos límite en que las fórmulas conocidas son inaplicables. Para apreciar los requisitos de la ciencia, el estudiante debe familiarizarse con un conjunto considerable de las matemáticas más intrincadas, cuya mera retención en la memoria interfiere materialmente con el progreso posterior. Por lo tanto, el primer proceso en el estudio efectivo de la ciencia debe ser uno de simplificación y reducción de los resultados de la investigación previa a una forma en que la mente pueda captarlos.Los resultados de esta simplificación pueden tomar la forma de una fórmula puramente matemática o de una hipótesis física. En el primer caso perdemos completamente la visión de los fenómenos a ser explicados; y aunque podemos rastrear las consecuencias de leyes dadas, nunca podemos obtener una visión más amplia de las conexiones del tema. Si, por otro lado, adoptamos una hipótesis física, vemos los fenómenos sólo a través de un medio, y somos responsables de una ceguera ante ciertos hechos y somos temerarios en las suposiciones que adoptamos para una explicación. "Por lo tanto, debemos descubrir algún método de investigación que permita a la mente a cada paso aferrarse a una concepción física clara, sin comprometerse con ninguna teoría fundada en la ciencia física de la que se toma esa concepción, de modo que no se deje a un lado del sujeto en búsqueda de sutilezas analíticas, ni llevado más allá de la verdad por una hipótesis favorita.

Para obtener ideas físicas sin adoptar una teoría física, debemos familiarizarnos con la existencia de analogías físicas. Por analogía física me refiero a la similitud parcial entre las leyes de una ciencia y las de otra que hace que cada una de ellas ilustre la otra. Así, todas las ciencias matemáticas se basan en las relaciones entre las leyes físicas y las leyes de los números, de modo que el objetivo de la ciencia exacta es reducir los problemas de la naturaleza a la determinación de cantidades mediante operaciones con números. Pasando de la más universal de todas las analogías a una muy parcial, encontramos la misma semejanza en forma matemática entre dos fenómenos diferentes que dan lugar a una teoría física de la luz.

Los cambios de dirección que sufre la luz al pasar de un medio a otro son idénticos a las desviaciones de la trayectoria de una partícula al moverse a través de un espacio estrecho en el que actúan las fuerzas intensas. Esta analogía, que se extiende solo a la dirección, y no a la velocidad del movimiento, durante mucho tiempo se creyó que era la verdadera explicación de la refracción de la luz; y todavía lo encontramos útil en la solución de ciertos problemas, en los cuales lo empleamos sin peligro, como un método artificial. La otra analogía, entre la luz y las vibraciones de un medio elástico, se extiende mucho más lejos, pero, aunque su importancia y fecundidad no pueden sobreestimarse, debemos recordar que se basa únicamente en un parecido en la forma entre las leyes de la luz y los de las vibraciones. Al despojarlo de su apariencia física y reducirlo a una teoría de "alternancias transversales", podríamos obtener un sistema de verdad estrictamente fundado en la observación, pero probablemente deficiente tanto en la intensidad de sus concepciones como en la fertilidad de su método. He dicho tanto sobre las cuestiones controvertidas de la Óptica como una preparación para la discusión de la teoría de la atracción a distancia, casi universalmente admitida.

Todos hemos adquirido la concepción matemática de estas atracciones. Podemos razonar sobre ellos y determinar sus formas o fórmulas apropiadas. Estas fórmulas tienen un significado matemático distinto, y se encuentra que sus resultados están de acuerdo con los fenómenos naturales. No hay una fórmula en las matemáticas aplicadas más consistente con la naturaleza que la fórmula de las atracciones, y ninguna teoría mejor establecida en la mente de los hombres que la de la acción de los cuerpos unos sobre otros a distancia. Las leyes de la conducción del calor en medios uniformes aparecen a primera vista entre las más diferentes en sus relaciones físicas de las relacionadas con las atracciones. Las cantidades que entran en ellos son temperatura, flujo de calor, conductividad. La palabra fuerza es extraña al tema. Sin embargo, encontramos que las leyes matemáticas del movimiento uniforme del calor en medios homogéneos son idénticas en su forma a las de las atracciones que varían inversamente al cuadrado de la distancia. Solo tenemos que sustituir la fuente de calor por el centro de atracción, el flujo de calor por efecto acelerante de atracción en cualquier punto y la temperatura por potencial, y la solución de un problema en las atracciones se transforma en un problema de calor.

Esta analogía entre las fórmulas de calor y la atracción, creo que fue señalada por primera vez por el profesor William Thomson en el *Camb. Math. Journal*, vol. III.

Actualmente se supone que la conducción del calor procede por una acción entre partes contiguas de un medio, mientras que la fuerza de atracción es una relación entre cuerpos distantes, y sin embargo, si no supiéramos nada más que lo expresado en las fórmulas matemáticas, no habría nada que permitiesen distinguir entre un conjunto de fenómenos y el otro.

Es verdad, que si introducimos otras consideraciones y observamos hechos adicionales, los dos temas asumirán aspectos muy diferentes, pero el parecido matemático de algunas de sus leyes permanecerá, y aún puede ser útil para excitar ideas matemáticas apropiadas.

Es mediante el uso de analogías de este tipo que he intentado traer a la mente, en una forma conveniente y manejable, aquellas ideas matemáticas que son necesarias para el estudio de los fenómenos de la electricidad. Los métodos son generalmente los sugeridos por los procesos de razonamiento que se encuentran en las investigaciones de Faraday[*], y que, aunque han sido

[*] Ver especialmente Series xxxviii de las *Experimental Researches* y *Phil. Mag*. 1852.

interpretados matemáticamente por el Prof. Thomson y otros, se supone generalmente que son de carácter indefinido e “no matemático”, cuando se compara con aquellos empleados por los matemáticos profesionales. Por el método que adopto, espero dejar en claro que no estoy tratando de establecer ninguna teoría física de una ciencia en la que apenas haya hecho un solo experimento, y que el límite de mi diseño es mostrar cómo, mediante una aplicación estricta de las ideas y métodos de Faraday, la conexión de las clases de fenómenos muy diferentes que ha descubierto puede colocarse claramente ante la mente matemática. Por lo tanto, evitaré tanto como pueda la introducción de cualquier cosa que no sirva como una ilustración directa de los métodos de Faraday, o de las deducciones matemáticas que puedan hacerse de ellos. Al tratar las partes más simples del tema, usaré los métodos matemáticos de Faraday así como sus ideas. Cuando la complejidad del tema lo requiera, usaré la notación analítica, y me limitaré al desarrollo de ideas originadas por el mismo filósofo.

En primer lugar, debo explicar e ilustrar la idea de "líneas de fuerza".

Cuando un cuerpo está electrificado de alguna manera, un pequeño cuerpo cargado con electricidad positiva y colocado en cualquier posición dada, experimentará una fuerza que lo impulse en cierta dirección. Si el pequeño cuerpo ahora está electrificado negativamente, será impulsado por una fuerza igual en una dirección exactamente opuesta.

Las mismas relaciones se mantienen entre un cuerpo magnético y los polos norte o sur de un pequeño imán. Si el polo norte se impulsa en una dirección, el polo sur se impulsa en la dirección opuesta.

De esta forma, podríamos encontrar una línea que pasa por cualquier punto del espacio, de modo que represente la dirección de la fuerza que actúa sobre una partícula positivamente electrificada, o sobre un polo norte elemental, y la dirección inversa de la fuerza sobre una partícula negativamente electrificada o un polo sur elemental. Dado que en cada punto del espacio se puede encontrar tal dirección, si comenzamos en cualquier punto y trazamos una línea para que, a medida que avanzamos, su dirección en cualquier punto siempre coincida con la de la fuerza resultante en ese punto, esta curva indicará la dirección de esa fuerza para cada punto por el que pasa, y podría llamarse por esa razón una línea de fuerza. De la misma manera podríamos dibujar otras líneas de fuerza, hasta que hayamos llenado todo el espacio con curvas que indican por su dirección la de la fuerza en cualquier punto asignado.

Deberíamos obtener así un modelo geométrico de los fenómenos físicos, que nos diría la dirección de la fuerza, pero aún deberíamos requerir algún método para indicar la intensidad de la fuerza en cualquier punto.

Si consideramos estas curvas no como simples líneas, sino como tubos finos de sección variable que transportan un fluido incompresible, entonces, dado que la velocidad del fluido es inversamente proporcional a la sección del tubo, podemos hacer que la velocidad varíe de acuerdo con cualquier ley dada, al regular la sección del tubo, y de esta manera podemos representar la intensidad de la fuerza así como su dirección por el movimiento del fluido en estos tubos. Este método de representar la intensidad de una fuerza por la velocidad de un fluido imaginario en un tubo es aplicable a cualquier sistema de fuerzas concebible, pero es capaz de una gran simplificación en el caso en que las fuerzas son tales que pueden ser explicadas por la hipótesis de atracciones que varían inversamente al cuadrado de la distancia, como los observados en fenómenos eléctricos y magnéticos. En el caso de un sistema de fuerzas perfectamente arbitrario, generalmente habrá intersticios entre los tubos; pero en el caso de las fuerzas eléctricas y magnéticas es posible organizar los tubos para no dejar intersticios. Los tubos serán entonces meras superficies, dirigiendo el movimiento de un fluido que llena todo el espacio. Ha sido usual comenzar la investigación de las leyes de estas fuerzas asumiendo de inmediato que los fenómenos se deben a fuerzas atractivas o repulsivas que actúan entre ciertos puntos. Sin embargo, podemos obtener una visión diferente del tema, y una más adecuada para nuestras investigaciones más difíciles, adoptando para la definición de las fuerzas que tratamos, que puedan ser representadas en la magnitud y dirección por el movimiento uniforme de un fluido incompresible.

Propongo, entonces, primero describir un método por el cual el movimiento de tal fluido puede ser claramente concebido; segundo, deducir las consecuencias de asumir ciertas condiciones de movimiento y señalar la aplicación del método a algunos de los fenómenos menos complejos de electricidad, magnetismo y galvanismo; y finalmente mostrar cómo mediante una extensión de estos métodos, y la introducción de otra idea debido a Faraday, las leyes de las atracciones y las acciones inductivas de los imanes y las corrientes pueden ser claramente concebidas, sin hacer ninguna suposición sobre la naturaleza física de la electricidad, o agregar algo a lo que ya ha sido probado por la experiencia.

Al referir todo a la idea puramente geométrica del movimiento de un fluido imaginario, espero alcanzar generalidad y precisión, y evitar los peligros que surgen de una teoría prematura que intenta explicar la causa de los fenómenos. Si se encuentra que los resultados de la mera especulación que he recopilado son de alguna utilidad para los filósofos experimentales, al organizar e interpretar sus resultados, se habrán cumplido sus propósitos, y una teoría madura, en la cual los hechos físicos se explicarán físicamente y que estará formada por aquellos conceptos que, al interrogar a la Naturaleza, permiten obtener la única solución verdadera de las preguntas que sugiere la teoría matemática.

I. *Teoría del movimiento de un fluido incompresible*

(1) No debe suponerse que la sustancia aquí tratada posee otras de las propiedades de los fluidos ordinarios, excepto las de libertad de movimiento y resistencia a la compresión. Ni siquiera es un fluido hipotético el que se introduce para explicar los fenómenos reales. Es simplemente una colección de propiedades imaginarias que pueden emplearse para establecer ciertos teoremas de matemática pura de manera más inteligible para muchas mentes y más aplicable a problemas físicos que aquellas en los que se usan solo símbolos algebraicos. El uso de la palabra "Fluido" no nos llevará al error, si recordamos que denota una sustancia puramente imaginaria con la siguiente propiedad:

La porción de fluido que en cualquier instante ocupa un volumen dado, ocupará en un instante sucesivo un volumen igual.

Esta ley expresa la incompresibilidad del fluido y nos proporciona una medida conveniente de su cantidad, es decir, su volumen. La unidad de cantidad del fluido será, por lo tanto, la unidad de volumen.

(2) En general, la dirección del movimiento del fluido será diferente en cada punto diferente del espacio que ocupa; dado que la dirección está determinada para cada punto, podemos concebir una línea comenzando en un punto cualquiera y continuar así de modo que cada elemento de la línea indique mediante su dirección, la dirección del movimiento en ese punto del espacio. Cada línea dibujada de tal manera que su dirección siempre indique la dirección del movimiento del fluido, se denomina *línea de movimiento de fluido*.

Si el movimiento del fluido es lo que se denomina *movimiento constante*, es decir, si la dirección y la velocidad del movimiento en cualquier punto fijo son independientes del tiempo. Las, curvas de este tipo representarán las trayectorias de las partículas individuales del fluido. Pero si el movimiento es variable, este generalmente no será el caso. Los casos de movimiento que serán tratados serán los de movimiento constante.

(3) Si sobre cualquier superficie que corta las líneas de movimiento del fluido dibujamos una curva cerrada, y si desde cada punto de esta curva dibujamos una línea de movimiento, estas líneas de movimiento generarán una superficie tubular que podemos llamar tubo del movimiento del fluido Como esta superficie es generada por líneas en la dirección del movimiento del fluido, ninguna parte del fluido puede fluir a través de ella, de modo que esta superficie imaginaria es tan impermeable al fluido como un tubo real.

(4) La cantidad de fluido que en una unidad de tiempo cruza cualquier sección fija del tubo es la misma en cualquier parte del tubo que se tome la sección. Siendo el fluido incompresible, y ninguna de sus partes se mueve a través de los laterales del tubo, por lo tanto, la cantidad que se sale a la segunda sección es igual a la que entra por la primera.

Si el tubo es tal que la unidad de volumen pasa a través de cualquier sección en una unidad de tiempo, se lo denomina *tubo unitario de movimiento de fluido*.

(5) En lo que sigue, se hará referencia a varias unidades, y se dibujará un número finito de líneas o superficies, representando en términos de esas unidades el movimiento del fluido. Ahora, para definir el movimiento en cada parte del fluido, habría que dibujar un número infinito de líneas a intervalos indefinidamente pequeños; pero como la descripción de tal sistema de líneas implicaría una referencia continua a la teoría de los límites, se ha pensado mejor suponer las líneas trazadas a intervalos que dependen de la unidad supuesta, y luego asumir la unidad tan pequeña como queramos por tomando un pequeño submúltiplo de la unidad estándar.

(6) Para definir el movimiento del fluido completo por medio de un sistema de tubos unitarios. Tome cualquier superficie fija que corte todas las líneas de movimiento de fluido, y dibuje sobre ella cualquier sistema de curvas que no se crucen entre sí. Sobre la misma superficie dibuje un

segundo sistema de curvas que intersectan el primer sistema, y dispuesto de tal manera que la cantidad de fluido que cruza la superficie dentro de cada uno de los cuadriláteros formados por la intersección de los dos sistemas de curvas sea unidad en unidad de tiempo. Desde cada punto en una curva del primer sistema, dibuje una línea de movimiento de fluido. Estas líneas formarán una superficie a través de la cual no pasa fluido. Se pueden dibujar superficies impermeables similares para todas las curvas del primer sistema. Las curvas del segundo sistema darán lugar a un segundo sistema de superficies impermeables que, por su intersección con el primer sistema, formarán tubos cuadrilaterales, que serán tubos de movimiento fluido. Como cada cuadrilátero de la superficie de corte transmite una unidad de fluido en la unidad de tiempo, cada tubo en el sistema transmitirá unidad de fluido a través de cualquiera de sus secciones en una unidad de tiempo. El movimiento del fluido en cada parte del espacio que ocupa está determinado por este sistema de tubos unitarios; porque la dirección del movimiento es la del tubo a través del punto en cuestión, y la velocidad es la recíproca del área de la sección del tubo unidad en ese punto.

(7) Ahora hemos obtenido una construcción geométrica que define completamente el movimiento del fluido al dividir el espacio que ocupa, en un sistema de tubos unitarios. A continuación, mostramos cómo mediante estos tubos podemos determinar varios aspectos relacionados con el movimiento del fluido.

Un tubo unitario puede retornar a sí mismo, o puede comenzar y terminar en diferentes puntos, y estos pueden estar en el límite del espacio en el que investigamos el movimiento o dentro de ese espacio. En el primer caso, hay una circulación continua de fluido en el tubo, en el segundo el fluido entra por un extremo y fluye por el otro. Si los extremos del tubo están en la superficie límite, se puede suponer que el fluido se suministra continuamente desde el exterior desde una fuente desconocida, y que fluye a través de la superficie del tubo hacia un reservorio desconocido; pero si el origen del tubo o su terminación está dentro del espacio considerado, entonces debemos concebir que el fluido sea suministrado por una fuente dentro de ese espacio, capaz de crear y emitir una unidad de fluido en una unidad de tiempo, y ser posterior tragado por un sumidero capaz de recibir y destruir la misma cantidad continuamente.

No hay nada autocontradictorio en la concepción de estas fuentes donde se crea el fluido, y se hunde donde es aniquilado. Las propiedades del fluido las disponemos a voluntad, lo hemos hecho incompresible, y ahora suponemos que, en cierto punto se produjo de la nada y que en otro punto se reduce a la nada. Los lugares de producción se denominarán fuentes, y su valor numérico será la cantidad de unidades de fluido que producen en una unidad de tiempo. Los lugares de reducción, a falta de un mejor nombre, se llamarán sumideros, y se estimarán por la cantidad de unidades de fluido absorbido en una unidad de tiempo. Ambos lugares se llaman, a veces, fuentes, entendiéndose que una fuente es un sumidero cuando su signo es negativo.

(8) Es evidente que la cantidad de fluido que pasa por una superficie fija se mide por el número de tubos unitarios que la cortan, y la dirección en que pasa el fluido está determinada por la de su movimiento en los tubos. Si la superficie es cerrada, entonces cualquier tubo cuyas terminaciones se encuentren en el mismo lado de la superficie debe cruzar la superficie tantas veces en una dirección como en la otra, y por lo tanto debe transportar tanta cantidad de fluido fuera de la superficie como la que lleva hacia adentro. Un tubo que comienza dentro de la superficie y termina fuera de ella

llevará una unidad de fluido; y uno que entra a través de la superficie y termina dentro de ella llevará la misma cantidad. Por lo tanto, para estimar la cantidad de fluido que sale de la superficie cerrada, debemos restar la cantidad de tubos que terminan dentro de la superficie del número de tubos que comienzan allí. Si el resultado es negativo, el fluido en general fluirá hacia adentro.

Si llamamos al inicio de un tubo unitario una fuente unitaria, y su terminación un sumidero unitario, entonces la cantidad de fluido producido dentro de la superficie se estima por el número de fuentes unitarias menos el número de sumideros unitarios, y esto debe fluir fuera de la superficie a causa de la incompresibilidad del fluido.

Al hablar de estos tubos unitarios, fuentes y sumideros, debemos recordar lo que se dijo en (5) en cuanto a la magnitud de la unidad, y cómo disminuyendo su tamaño y aumentando su número podemos distribuirlos de acuerdo con cualquier ley, por complicada que sea.

(9) Si conocemos la dirección y la velocidad del fluido en dos puntos diferentes, cualesquiera y si concebimos un tercer caso en el que la dirección y la velocidad del fluido en cualquier punto es la resultante de las velocidades en los dos anteriores casos en los puntos correspondientes, entonces la cantidad de fluido que pasa a través de una superficie fija dada en el tercer caso será la suma algebraica de las cantidades que pasan la misma superficie en los dos casos anteriores. La velocidad con la que el fluido cruza cualquier superficie es la componente normal de la velocidad a la superficie y la resultante de la velocidad de un sistema de dos fluidos es igual a la suma de las velocidades resultantes de los componentes.

Por lo tanto, el número de tubos unitarios que, en el tercer caso, cruzan la superficie hacia afuera, debe ser la suma algebraica de los números que lo cruzan en los dos casos anteriores, y el número de fuentes dentro de cualquier superficie cerrada será la suma de los números de fuentes en los dos casos anteriores. Dado que la superficie cerrada puede tomarse tan pequeña como queramos, es evidente que la distribución de fuentes y sumideros en el tercer caso surge de la simple superposición de las distribuciones en los dos casos anteriores.

II. ***Teoría del movimiento uniforme de un fluido incompresible imponderable a través de un medio resistente***.

(10) Aquí se supone que el fluido no tiene inercia, y su movimiento se opone por la acción de una fuerza que podemos concebir que se debe a la resistencia de un medio a través del cual se supone que fluye el fluido. Esta resistencia depende de la naturaleza del medio y, en general, dependerá de la dirección en que se mueve el fluido, así como de su velocidad. Por el momento, podemos restringirnos al caso de un medio uniforme, cuya resistencia es la misma en todas las direcciones. La ley que asumimos es la siguiente.

Cualquier porción del fluido que se mueve a través del medio resistente se enfrenta directamente con una fuerza de retardo proporcional a su velocidad.

Si la velocidad se representa por v, entonces la resistencia será una fuerza igual a kv que actúa sobre la unidad de volumen del fluido en una dirección contraria a la del movimiento. Por lo tanto, para que la velocidad se mantenga constante, debe haber una mayor presión detrás de cualquier porción del fluido que la que hay delante de ella, de modo que la diferencia de presiones puede neutralizar el efecto de la resistencia. Concebimos una unidad cúbica de fluido (que podemos hacer tan pequeño como queramos, en virtud de (5)), y suponemos que se mueve en una dirección perpendicular a dos de sus caras. Entonces la resistencia será kv, y, por lo tanto, la diferencia de presiones entre la primera y la segunda cara es kv, de modo que la presión disminuye en la dirección del movimiento a la velocidad de kv para cada unidad de longitud medida a lo largo de la línea de movimiento; de modo que si medimos una longitud igual a h unidades, la diferencia de presión en sus extremos será kvh.

(11) Como se supone que la presión varía continuamente en el fluido, todos los puntos en los cuales la presión es igual a una presión dada p se encontrarán en una cierta superficie que podemos llamar la *superficie* (p) *de igual presión*. Si se construye una serie de estas superficies en el fluido correspondiente a las presiones 0, 1, 2, 3, etc., entonces, el número de la superficie indicará la presión que le pertenece, y la superficie puede denominarse *superficie* 0, 1, 2, 3, etc. La unidad de presión es aquella presión que se produce por unidad de fuerza que actúa sobre la unidad de superficie. Por lo tanto, para disminuir la unidad de presión como en (5) debemos disminuir la unidad de fuerza en la misma proporción.

(12) Es fácil ver que estas superficies de igual presión deben ser perpendiculares a las líneas de movimiento del fluido; porque si el fluido se moviera en cualquier otra dirección, habría una resistencia a su movimiento que no podría equilibrarse con ninguna diferencia de presiones. (Debemos recordar que el fluido aquí considerado no tiene inercia o masa, y que sus propiedades son las únicas que se le asignan formalmente, de modo que las resistencias y presiones son las únicas cosas que se deben considerar). Por lo tanto, hay dos conjuntos de superficies que por su intersección forman el sistema de tubos unitarios, y el sistema de superficies de igual presión corta las otras en ángulos rectos. Sea h la distancia entre dos superficies consecutivas de igual presión medida a lo largo de una línea de movimiento, entonces, dado que la diferencia de presiones es igual a 1,

$$\boldsymbol{kvh = 1},$$

que determina la relación entre v y h, de modo que se puede hallar una cuando la otra es conocida. Sea s el área de la sección de un tubo unitario medido en una superficie de igual presión, entonces, dada la definición de tubo unitario

$$\boldsymbol{vs = 1},$$

De la última ecuación encontramos

$$\boldsymbol{s = kh}$$

(13) Las superficies de igual presión cortan a los tubos unitarios en porciones cuya longitud es h y sección es$s$. Estas porciones elementales de los tubos unitarios se denominarán *celdas unitarias*.

En cada una de estas celdas unitarias, la unidad de volumen de fluido pasa de una presión *p* a una presión (*p*– 1) en una unidad de tiempo y, por lo tanto, supera la unidad de resistencia en ese momento. Por lo tanto, el trabajo dedicado a superar la resistencia es de una unidad en cada celda por cada unidad de tiempo.

(14) Si se conocen las superficies de igual presión, se puede encontrar la dirección y la magnitud de la velocidad del fluido en cualquier punto, después de lo cual se puede construir un sistema completo de tubos unitarios, y los comienzos y las terminaciones se indican como las fuentes de donde se deriva el fluido y los sumideros donde desaparece. Para poder demostrar lo contrario de esto, que si se da la distribución de las fuentes, se puede encontrar la presión en cada punto, debemos establecer ciertas proposiciones preliminares.

(15) Si conocemos las presiones en cada punto del fluido en dos casos diferentes, y si tomamos un tercer caso en el que la presión en cualquier punto es la suma de las presiones en los puntos correspondientes en los dos casos anteriores, entonces la velocidad en cualquier punto del tercer caso es la resultante de las velocidades en los otros dos, y la distribución de las fuentes es la debida a la simple superposición de las fuentes en los dos casos anteriores.

La velocidad en cualquier dirección es proporcional a la velocidad de disminución de la presión en esa dirección; de modo que si se suman dos sistemas de presiones, dado que la tasa de disminución de presión a lo largo de cualquier línea será la suma de las tasas combinadas, la velocidad en el nuevo sistema orientado en la misma dirección será la suma de las partes resueltas en los dos sistemas originales. Por lo tanto, la velocidad en el nuevo sistema será la resultante de las velocidades en los puntos correspondientes en los dos sistemas anteriores.

De esto se deduce, por (9) que, en el nuevo sistema, la cantidad de fluido que cruza cualquier superficie fija es la suma de las cantidades de fluido correspondientes en el sistema anterior, y que las fuentes de los dos sistemas originales simplemente se combinan para formar el nuevo.

Es evidente que en un sistema en que la presión es la diferencia de presiones entre dos sistemas dados, la distribución de las fuentes se obtendrá cambiando el signo de todas las fuentes en el segundo sistema y sumándolas a las del primero.

(16) Si la presión en cada punto de una superficie cerrada es la misma e igual a *p*, y si no hay fuentes o sumideros dentro de la superficie, entonces no habrá movimiento del fluido dentro de la superficie, y la presión dentro de ella será uniforme e igual a *p*.

Porque si hay movimiento del fluido dentro de la superficie habrá tubos de movimiento de fluido, y estos tubos deben retornar a sí mismos o terminarse dentro de la superficie o en su límite. Ahora bien, dado que el fluido siempre fluye desde lugares de mayor presión a lugares de menor presión, no puede fluir en una curva de reingreso; ya que no hay fuentes o sumideros dentro de la superficie, los tubos no pueden comenzar ni terminar excepto en la superficie; y dado que la presión en todos los puntos de la superficie es la misma, no puede haber movimiento en los tubos que tienen ambas extremidades en la superficie. Por lo tanto, no hay movimiento dentro de la superficie, y por lo tanto ninguna diferencia de presión que pueda causar movimiento, y dado que la presión en la superficie límite es *p*, la presión en cualquier punto dentro de ella también es *p*.

(17) Si se conoce la presión en cada punto de una superficie cerrada dada, y también se conoce la distribución de las fuentes dentro de la superficie, entonces solo puede existir una única distribución de presiones dentro de la superficie.

Porque si se pudieran encontrar dos distribuciones diferentes de presiones que satisfagan estas condiciones, se podría formar una tercera distribución en la cual la presión en cualquier punto debería ser la diferencia de las presiones en las dos distribuciones anteriores. En este caso, dado que las presiones en la superficie y las fuentes dentro de ella son las mismas en ambas distribuciones, la presión en la superficie en la tercera distribución sería cero, y todas las fuentes dentro de la superficie desaparecerían, por (15).

Luego, por (16) la presión en cada punto en la tercera distribución debe ser cero; pero esta es la diferencia de las presiones en los dos casos anteriores, y por lo tanto estos casos son los mismos, por lo que solo hay una distribución de presión posible.

18) Determinemos a continuación la presión en cualquier punto de un cuerpo infinito de fluido en el centro del cual se encuentra una fuente unitaria, suponiendo que la presión a una distancia infinita de la fuente es cero.

El fluido fluirá desde el centro simétricamente, y dado que la unidad de volumen fluye desde cada superficie esférica que rodea el punto en la unidad de tiempo, la velocidad a una distancia r de la fuente será

El fluido fluirá desde el centro simétricamente, y dado que la unidad de volumen fluye desde cada superficie esférica que rodea el punto en la unidad de tiempo, la velocidad a una distancia r de la fuente será

$$v = \frac{1}{4\pi r^2}$$

Por lo tanto, la velocidad de disminución de la presión es *kv*o $\frac{k}{4\pi r^2}$, y, dado que cuando *r* es infinito la presión es 0, la presión real en cada punto será

$$p = \frac{k}{4\pi r}$$

Esto implica que la presión es inversamente proporcional a la distancia a la fuente.

Es evidente que la presión debida a un sumidero unitario será negativa e igual a $-\frac{k}{4\pi r}$.

Si tenemos una fuente formada por la asociación de *S* fuentes unitarias, la presión resultante será $p = \frac{ks}{4\pi r^2}$, de modo que la presión a una distancia dada varía según la resistencia y el número de fuentes asociadas.

(19) Si varias fuentes y sumideros coexisten en el fluido, entonces, para determinar la presión resultante, solo tenemos que sumar las presiones que produce cada fuente o sumidero. Por (15) esto será una solución del problema, y por (17) será el único. Mediante este método podemos determinar las presiones debidas a cualquier distribución de fuentes, ya que mediante el método de (14) podemos determinar la distribución de las fuentes a las que se debe una determinada distribución de presiones.

(20) Tenemos que demostrar que si concebimos una superficie imaginaria como fija en el espacio que intersecta las líneas de movimiento del fluido, podemos sustituir el fluido de un lado de esta superficie por una distribución de fuentes sobre la superficie misma sin alterar de alguna manera el movimiento del fluido en el otro lado de la superficie.

Porque si describimos el sistema de tubos unitarios que define el movimiento del fluido, y dondequiera que un tubo ingresa a través de la superficie, colocamos una fuente unitaria, y cada vez que un tubo sale a través de la superficie, colocamos un sumidero unitario, y al mismo tiempo la superficie permanece impermeable al fluido, el movimiento del fluido en los tubos continuará como antes.

(21) Si el sistema de presiones y la distribución de las fuentes que las producen se conocen en un medio cuya resistencia se mide por *k*, entonces para producir el mismo sistema de presiones en un medio cuya resistencia es la unidad, la tasa de producción en cada fuente debe multiplicarse por k. Porque la presión en cualquier punto debido a una fuente dada varía como la tasa de producción y la resistencia en conjunto; por lo tanto, si la presión es constante, la tasa de producción debe variar inversamente a la resistencia.

(22) *Sobre las condiciones que debe cumplir una superficie que separa dos medios cuyos coeficientes de resistencia son k y k'.*

Estas se obtienen a partir de la consideración de que la cantidad de fluido que, desde cualquier punto de un medio fluye hacia el otro y que la presión varía continuamente de un medio a otro. La velocidad normal a la superficie es la misma en ambos medios y. por lo tanto, la velocidad de disminución de la presión es proporcional a la resistencia. La dirección de los tubos de movimiento y las superficies de igual presión se alterarán después de atravesar la superficie, y la ley de esta refracción que tiene lugar en el plano que pasa por la dirección de incidencia y la normal a la superficie, estará dada por la relación entre la tangente del ángulo de incidencia y la tangente del ángulo de refracción e igual a la relación entre *k'* y *k*.

(23) Sea que el espacio dentro de una dada superficie cerrada se llene con un medio diferente al que está en su exterior, y supongamos conocidas las presiones en cualquier punto de este sistema compuesto debido a una distribución dada de fuentes dentro y fuera de la superficie. Se requiere

determinar una distribución de fuentes que produciría el mismo sistema de presiones en un medio cuyo coeficiente de resistencia es la unidad.

Construya los tubos de movimiento de fluido, y dondequiera que un tubo unitario entra, en cualquier medio, coloque una fuente unitaria y en todo lugar donde un tubo unitario sale, coloque un sumidero unitario. Entonces, si suponemos que la superficie es impermeable, todo continuará como antes.

Supongamos que la resistencia del medio exterior viene medida por k, y la del interior por V. Entonces, si multiplicamos la tasa de producción de todas las fuentes en el medio exterior (incluidas las de la superficie), por k, y hacemos unitario el coeficiente de resistencia, las presiones permanecerán como antes, y lo mismo ocurrirá en el medio interior si multiplicamos todas las fuentes en él por k', incluidas las de la superficie, y hacemos que su resistencia sea la unidad.

Dado que las presiones en ambos lados de la superficie son ahora iguales, podemos suponer, si queremos, que es permeable.

Ahora tenemos el sistema original de presiones producido en un medio uniforme por una combinación de tres sistemas de fuentes. El primero de ellos es el sistema externo dado multiplicado por k, el segundo es el sistema interno dado multiplicado por k', y el tercero es el sistema de fuentes y sumideros en la superficie misma. En el caso original, cada fuente en el medio externo tenía un sumidero igual en el medio interno del otro lado de la superficie, pero ahora la fuente se multiplica por k y el sumidero por k', de modo que el resultado es para cada fuente unitaria externa en la superficie, una fuente = (k–k'). Por medio de estos tres sistemas de fuentes, el sistema original de presiones puede producirse en un medio para el que k = 1.

(24) Supongamos que no hay resistencia en el medio dentro de la superficie cerrada, es decir sea k '= 0, entonces la presión dentro de la superficie cerrada es uniforme e igual a p, y la presión en la superficie misma también es p. Si al asumir cualquier distribución de pares de fuentes y sumideros dentro de la superficie además de las fuentes externas e internas dadas, y al suponer que el medio es el mismo dentro y fuera de la superficie, podemos hacer que la presión en la superficie sea uniforme, las presiones encontradas para el medio externo, junto con la presión uniforme p en el medio interno, será la única distribución verdadera de presiones que es posible.

Porque si se pudieran encontrar dos distribuciones de este tipo tomando diferentes distribuciones imaginarias de pares de fuentes y sumideros dentro del medio, entonces tomando la diferencia de los dos para una tercera distribución, deberíamos tener la presión de la superficie límite constante en el nuevo sistema y tantas fuentes como sumideros dentro de ella, y por lo tanto, para cualquier fluido que fluya hacia cualquier punto de la superficie, una cantidad igual debe fluir en algún otro punto hacia afuera.

En el medio externo, todas las fuentes se destruyen entre sí, y tenemos un medio infinito sin fuentes que rodean el medio interno. La presión en el infinito es cero, mientras que en la superficie es constante. Si la presión en la superficie es positiva, el movimiento del fluido debe ser hacia afuera desde cada punto de la superficie; si es negativo, debe fluir hacia la superficie. Pero se ha demostrado que ninguno de estos casos es posible, porque si algún fluido entra en la superficie, debe escapar una cantidad igual y, por lo tanto, la presión en la superficie es cero en el tercer sistema.

Por lo tanto, en el tercer caso, la presión en todos los puntos en el límite del medio interno es cero y no hay fuentes, y por consiguiente, por (16) la presión es cero en todas partes.

La presión en la superficie límite del medio interno también es cero, y no hay resistencia, por lo tanto, es cero en todo el medio; pero, en el tercer caso, la presión es la diferencia de presiones en los dos casos dados, por lo tanto, estos son iguales, y solo hay una distribución de presión que es posible, es decir, que se debe a la distribución imaginaria de fuentes y sumideros.

(25) Cuando en el medio interno la resistencia es infinita, no puede haber paso de fluido a través de ella o dentro de ella. Por lo tanto, la superficie delimitada puede considerarse como impermeable al fluido, y los tubos de movimiento de fluido correrán a lo largo de ella sin cortarla.

Si al asumir cualquier distribución arbitraria de fuentes dentro de la superficie además de las fuentes dadas en el medio externo, y al calcular las presiones y velocidades resultantes como en el caso de un medio uniforme, podemos cumplir la condición de que no haya velocidad en la superficie y el sistema de presiones en el medio externo será el verdadero. Puesto que ningún fluido pasa a través de la superficie, los tubos en el interior son independientes de los que están fuera y pueden retirarse sin alterar el movimiento externo.

(26) Si la extensión del medio interno es pequeña, y si la diferencia de resistencia en los dos medios también es pequeña, entonces la posición de los tubos de la unidad no se verá muy alterada por lo que ocurriría si el medio externo llenase el espacio completo.

Sobre la base de esta suposición podemos calcular fácilmente el tipo de alteración que producirá la introducción del medio interno; porque dondequiera que un tubo unitario entre en la superficie debemos concebir una fuente que produzca fluido a una velocidad $(k' - k)/k$, y donde un tubo lo deje debemos colocar un líquido que aniquila el sumidero a la velocidad $(k' - k)/k$.Luego, calculando las presiones sobre la suposición de que la resistencia en ambos medios es k, lo mismo que en el medio externo, obtendremos la verdadera distribución de presiones muy aproximadamente, y podemos obtener un mejor resultado repitiendo el proceso en el sistema de las presiones así obtenidas.

(27) Si en lugar de un cambio abrupto de un coeficiente de resistencia a otro tomamos un caso en el que la resistencia varía continuamente de un punto a otro, podemos tratar el medio como si estuviera compuesto de bandas delgados, cada una de las cuales tiene una resistencia uniforme . Suponiendo una distribución apropiada de las fuentes sobre las superficies de separación de las capas, podemos tratar el caso como si la resistencia fuera igual a la unidad, como en (23). Las fuentes se distribuirán de forma continua a lo largo de todo el medio y serán positivas siempre que el movimiento se realice desde lugares de menor a mayor resistencia y negativos cuando estén en dirección contraria.

(28) Hasta ahora hemos supuesto que la resistencia en un punto dado del medio es la misma en cualquier dirección en que se produzca el movimiento del fluido; pero podemos concebir un caso en

el que la resistencia sea diferente en diferentes direcciones. En tales casos, las líneas de movimiento no serán, en general, perpendiculares a las superficies de igual presión. Si a, b, c son las componentes de la velocidad en cualquier punto, y α, β, γ las componentes de la resistencia en el mismo punto, estas cantidades estarán conectadas por el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que se puede llamar “'ecuaciones de conducción” y se hará referencia a ese nombre.

$$a = P_1\alpha + Q_3\beta + R_2\gamma,$$

$$b = P_2\beta + Q_1\gamma + R_3\alpha$$

$$c = P_3\gamma + Q_2\alpha + R_1\beta.$$

En estas ecuaciones hay nueve coeficientes de conductividad independientes. Para simplificar las ecuaciones, hagamos

$$Q_1 + R_1 = 2S_1, Q_1 - R_1 = 2lT, \quad \text{etc.}$$

donde
$$4T^2 = (Q_1 - R_1)^2 + (Q_2 - R_2)^2 + (Q_3 - R_3)^2,$$

Y que l, m,$n$sean los cosenos directores respecto a una cierta línea fija en el espacio.

La ecuación se podrá escribir

$$a = P_1\alpha + S_3\beta + S_2\gamma + (n\beta - m\gamma)T,$$
$$b = P_2\beta + S_1\gamma + S_3\alpha + (l\gamma - n\alpha)T,$$
$$c = P_3\gamma + S_2\alpha + S_1\beta + (m\alpha - l\beta)T.$$

Mediante una transformación ordinaria de coordenadas podemos eliminar los coeficientes indicados con S, y la ecuación se transforma en

$$a = P'_1\alpha + (n'\beta - m'\gamma)T,$$
$$b = P'_2\beta + (l'\gamma - n'\alpha)T,$$
$$c = P'_3\gamma + (m'\alpha - l'\beta)T.$$

dondel',m',n' son los cosenos directores respecto a una línea fija referida a un nuevo sistema de ejes. Si hacemos

$$\alpha = \frac{dp}{dx} \; ; \beta = \frac{dp}{dy} \; ; \gamma = \frac{dp}{dz}$$

la ecuación de continuidad

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0$$

Se vuelve

$$P'_1 \frac{d^2 p}{dx^2} + P'_2 \frac{d^2 p}{dy^2} + P'_3 \frac{d^2 p}{dz^2} = 0$$

Por lo tanto, podemos hacer

$$x = \sqrt{P'_1}\,\xi, \quad y = \sqrt{P'_2}\,\eta, \quad z = \sqrt{P'_3}\,\zeta$$

Entonces

$$\frac{d^2 p}{d\xi^2} + \frac{d^2 p}{d\eta^2} + \frac{d^2 p}{d\zeta^2} = 0$$

que es la ecuación ordinaria de conducción.

Por lo tanto, parece que la distribución de presiones no se ve alterada por la existencia del coeficiente *T*. El profesor Thomson ha mostrado cómo concebir una sustancia en la que este coeficiente determina una propiedad que hace referencia a un eje que, a diferencia de los ejes de P_1, P_2, P_3 es dipolar.

Para mayor información sobre ecuaciones de conducción, ver Professor Stokes "On the Conduction of Heat in Crystals." (*Cambridge and DublinMath. Journ*.), y Professor Thomson:"On the Dynamical Theory of Heat", Parte V. (*Transactions of Royal Society of Edinburgh*, Vol xxi. Parte i.).

Es evidente que todo lo que se ha probado en (14), (15), (16), (17) con respecto a la superposición de diferentes distribuciones de presión, y que solo hay una distribución de presiones correspondiente a una distribución dada de fuentes, será cierto también en los casos en que la resistencia varía de un punto a otro, y cuando la resistencia en el mismo punto es diferente en diferentes direcciones. Porque si examinamos la prueba, la encontraremos aplicable a tales casos, así como a la de un medio uniforme.

29) Ahora estamos preparados para probar ciertas proposiciones generales que son verdaderas en el caso más general de un medio cuya resistencia es diferente en diferentes direcciones y varía de un punto a otro.

Cuando se conoce la distribución de presiones, mediante el método de (28) podemos construir las superficies de igual presión, los tubos de movimiento de fluido, las fuentes y los sumideros. Es evidente que dado que en cada celda en la que un tubo unitario está dividido por las superficies de igual presión, la unidad de fluido pasa de la presión *p* a la presión (*p*– 1) en la unidad de tiempo y el trabajo que se realiza mediante el fluido en cada célula para superar la resistencia es la unidad.

La cantidad de celdas en cada tubo unitario está determinada por el número de superficies de igual presión a través de las cuales pasa. Si la presión al principio del tubo es *p* y al final *p*', entonces el número de celdas será *p – p'*. Ahora bien, si el tubo se hubiera extendido desde la fuente a un lugar donde la presión es cero, el número de células habría sido *p*, y si el tubo hubiera venido desde el sumidero a cero, el número habría sido *p*' y el número verdadero es la diferencia de estos.

Por lo tanto, si encontramos la presión en una fuente *S* de la cual los tubos *S* proceden, es *p*, *Sp* será el número de celdas debido a la fuente *S*; pero si *S*'de los tubos terminan en un sumidero a una presión *p*', entonces debemos descontar las células *S'p'*del número previamente obtenido. Ahora, si denotamos la fuente de los *S* tubos mediante *S*, el sumidero de los *S'* tubos puede escribirse – *S'*; los sumideros siempre se consideran negativos, y la expresión general para el número de celdas en el sistema será **Σ** (*Sp*).

(30) Puede llegarse a la misma conclusión observando que, en cada celda, se realiza la unidad de trabajo. Si en cada fuente *S*, son expulsadas *S* unidades de fluido contra una presión *p*, de modo que el trabajo realizado por el fluido en la superación de la resistencia sea *Sp* y en cada sumidero en el que terminan los tubos *S*', las *S'* unidades de fluido se hunden bajo la presión *p'*; el trabajo hecho sobre el fluido por la presión será, por lo tanto,*S'p'*. Todo el trabajo hecho por el fluido podrá expresarse por

$$W = \sum Sp - \sum S' p'$$

O, en forma más concisa, considerando a los sumideros como fuentes negativas

$$W = \sum (Sp).$$

(31) Supongamos que *S* representa la tasa de producción de una fuente en cualquier medio, y sea *p* la presión en cualquier punto dado debido a esa fuente. Entonces, si superponemos en esta, otra fuente igual, cada presión se duplicará, y así, por superposición sucesiva, encontraremos que una fuente *nS* produciría una presión *np*, o más generalmente, la presión en cualquier punto debido a una fuente dada varía según la tasa de producción de la fuente. Esto puede ser expresado por la ecuación

$$p = RS,$$

donde *R* es un coeficiente que depende de la naturaleza del medio y de la posición de la fuente en un punto dado. En un medio uniforme cuya resistencia se mide por *k*

$$p = \frac{kS}{4\pi r} \therefore R = \frac{k}{4\pi r}$$

R se puede llamar coeficiente de resistencia del medio entre la fuente y el punto dado. Al combinar cualquier cantidad de fuentes, generalmente tendremos

$$p = \Sigma(RS),$$

(32) En un medio uniforme, la presión debida a una fuente *S*, será

$$p = \frac{k}{4\pi}\frac{S}{r}$$

Con otra fuente *S’* a la distancia *r* tendremos

$$S'\,p = \frac{k}{4\pi}\frac{SS'}{r} = Sp'$$

sea *p*' la presión en *S* debido a *S*'. Si, por lo tanto, hay dos sistemas de fuentes Σ(*S*) y Σ(*S*'), y si las presiones debidas a la primera son *p* y a la segunda *p*', entonces

$$\Sigma(S'p) = \Sigma(Sp').$$

Para cada término *S’p*habrá un término *Sp*’ igual a él.

(33) Supongamos que en un medio uniforme el movimiento del fluido es en todas partes paralelo a un plano, entonces las superficies de igual presión serán perpendiculares a este plano. Si tomamos dos planos paralelos a una distancia igual a *k* uno del otro, podemos dividir el espacio entre estos planos en tubos unitarios por medio de superficies cilíndricas perpendiculares a los planos, y estos junto con las superficies de igual presión dividirán el espacio en celdas cuya longitud es igual a la anchura. Porque si *h* es la distancia entre superficies consecutivas de igual presión y *s* la sección del tubo de la unidad, tenemos por (13) $s = kh$.

Pero *s* es el producto de la amplitud y la profundidad; como la profundidad es *k*, por lo tanto, la anchura es *h* e igual a la longitud.

Si dos sistemas de curvas planas se cortan entre sí en ángulos rectos para dividir el plano en pequeñas áreas de las que la longitud y la anchura son iguales, entonces tomando otro plano a la distancia *k* de la primera y erigiendo superficies cilíndricas en las curvas del plano como bases, se formará un sistema de celdas que satisfará las condiciones ya sea que supongamos que el fluido corra a lo largo del primer conjunto de líneas de corte o del segundo*.

Aplicación de la idea de líneas de fuerza

Ahora debo mostrar cómo la idea de las líneas de movimiento de fluidos descritas anteriormente puede modificarse para que sea aplicable a las ciencias de la electricidad estática, el magnetismo permanente, el magnetismo de inducción y las corrientes galvánicas uniformes, reservando las leyes del electromagnetismo para una consideración especial.

Asumiré que los fenómenos de la electricidad estática ya han sido explicados por la acción mutua de dos tipos opuestos de materia. Si consideramos a uno de estos como electricidad positiva

*Ver Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Vol. iii, p. 286.

y el otro como negativa, entonces dos partículas de electricidad interactúan con una fuerza que se mide por el producto de las masas de las partículas divididas por el cuadrado de su distancia.

Ahora encontramos en (18) que la velocidad de nuestro fluido imaginario debido a una fuente *S* a una distancia *r* varía inversamente a r^2. Veamos cuál será el efecto de sustituir esa fuente por cada partícula de electricidad positiva. La velocidad debida a cada fuente sería proporcional a la atracción debida a la partícula correspondiente, y la velocidad resultante debida a todas las fuentes sería proporcional a la atracción resultante de todas las partículas. Ahora podemos encontrar la presión resultante en cualquier punto agregando las presiones debidas a las fuentes dadas, y por lo tanto podemos encontrar la velocidad resultante en una dirección dada a partir de la tasa de disminución de presión en esa dirección, y esto será proporcional a la atracción resultante de las partículas resueltas en esa dirección.

Dado que la atracción resultante en el problema eléctrico es proporcional a la disminución de presión en el problema imaginario, y dado que podemos seleccionar cualquier valor para las constantes en el problema imaginario, podemos suponer que la atracción resultante en una cierta dirección *x* es numéricamente igual a la disminución de la presión en esa dirección, o

$$X = -\frac{dp}{dx}$$

Mediante esta suposición encontramos que si *V* es el potencial

$$dV = Xdx + Ydy + Zdz = -\,dp,$$

y, como a una distancia infinita $V = 0$ y $p = 0$, $V = -p$

En el problema eléctrico tenemos

$$V = -\sum\left(\frac{dm}{r}\right)$$

En el fluido

$$p = \sum\left(\frac{k}{4\pi}\frac{S}{r}\right)$$

$$\therefore\; S = \frac{4\pi}{k}dm$$

Si se supone que *k* es muy grande, la cantidad de fluido producido por cada fuente para mantener las presiones será muy pequeña.

El potencial de cualquier sistema de electricidad en sí mismo será

$$\sum (pdm) = \frac{k}{4\pi}, \quad \sum (pS) = \frac{k}{4\pi} W$$

Si Σ (*dm*), Σ (*dm*') son dos sistemas de partículas eléctricas y *p, p*' los potenciales debidos, respectivamente, a ellas, entonces por (32)

$$\sum (pdm') = \frac{k}{4\pi} \sum (pS') = \frac{k}{4\pi} \sum (p' S) = \sum (p' dm)$$

o que el potencial del primer sistema sobre el segundo es igual al potencial del segundo sistema sobre el primero.

Si la conducción del dieléctrico es perfecta o casi igual para las pequeñas cantidades de electricidad con las que tratamos, entonces tenemos el caso de (24). El dieléctrico se considera entonces como un conductor, su superficie es una superficie de igual potencial y la atracción resultante cerca de la superficie misma es perpendicular a ella.

Teoría de los imanes permanentes

Un imán se concibe como formado por partículas elementales magnetizadas, cada una de las cuales tiene sus propios polos norte y sur, cuya acción sobre otros polos norte y sur se rige por leyes matemáticamente idénticas a las de la electricidad. De ahí que la misma aplicación de la idea de líneas de fuerza se pueda hacer a este sujeto, y la misma analogía del movimiento del fluido se puede emplear para ilustrarlo.

Pero puede ser útil examinar la forma en que la polaridad de los elementos de un imán puede ser representada por las celdas unitarias en el movimiento del fluido. En cada celda unitaria, la unidad de fluido entra por una cara y fluye por la cara opuesta, de modo que la primera cara se convierte en un sumidero unidad y la segunda en una fuente unidad con respecto al resto del fluido. Por lo tanto, se puede comparar con un imán elemental, con una cantidad igual de materia magnética norte y sur distribuida en dos de sus caras. Si ahora consideramos que la celda forma parte de un sistema, el fluido que fluye de una celda fluirá hacia la siguiente, y así sucesivamente, de modo que la fuente se transferirá desde el extremo de la celda hasta el extremo del tubo unidad. Si todos los tubos de la unidad comienzan y terminan en la superficie límite, las fuentes y sumideros se distribuirán por completo en esa superficie, y en el caso de un imán que tiene lo que se ha denominado distribución solenoide o tubular de magnetismo, todo el imaginario magnético de la materia estará en la superficie[*].

[*] Ver Professor Thomson"*On the Mathematical Theory of Magnetism*", Capítulos iii y v. *Phil.Trans*. 1851.

Teoría de la inducción paramagnética y diamagnética

Faraday[†] ha demostrado que los efectos de los cuerpos paramagnéticos y diamagnéticos en el campo magnético se pueden explicar suponiendo que los cuerpos paramagnéticos conducen mejor las líneas de fuerza y los cuerpos diamagnéticos peor, que el medio circundante. Al referirse a (23) y (26), y al suponer que las fuentes representan la materia magnética del norte, y los sumideros la materia magnética del sur, entonces si un cuerpo paramagnético se encuentra cerca de un polo norte, las líneas de fuerza al entrar producirán materia magnética sur, y al dejarlo producirán una cantidad igual de materia magnética norte. Como, en general, las cantidades de materia magnética son iguales, pero la materia del sur es más cercana al polo norte, el resultado será la atracción. Si, por otro lado, el cuerpo es diamagnético, o un conductor peor de líneas de fuerza que el medio circundante, habrá una distribución imaginaria de la materia magnética del norte donde las líneas pasan al peor conductor, y del sur donde se distribuyen de un modo que, en general, producen repulsión.

"De la consideración de que el potencial de todo el sistema es proporcional a la cantidad de trabajo realizado por el fluido en la superación de la resistencia, podemos obtener una ley más general. La introducción de un segundo medio aumenta o disminuye el trabajo realizado según que la resistencia sea mayor o menor que la del primer medio. La cantidad de este aumento o disminución variará según el cuadrado de la velocidad del fluido.

Ahora, según la teoría de los potenciales, la fuerza de movimiento en cualquier dirección se mide por la velocidad de disminución del potencial del sistema al pasar en esa dirección. Por lo tanto, cuando k', la resistencia dentro del segundo medio, es mayor que k, la resistencia en el medio circundante, hay una fuerza que se ejerce desde lugares donde la fuerza resultante v es mayor a donde es menor, de modo que un cuerpo diamagnético se mueve de mayor a menor valor de la fuerza resultante.[‡]

En cuerpos paramagnéticos k' es menor que k, de modo que la fuerza ahora está dirigida de puntos de menor a puntos de mayor fuerza magnética resultante. Dado que estos resultados dependen únicamente de los valores relativos de k y k', es evidente que cambiando el medio circundante, el comportamiento de un cuerpo puede cambiarse de paramagnético a diamagnético a voluntad·

Es evidente que deberíamos obtener los mismos resultados matemáticos si hubiéramos supuesto que la fuerza magnética tiene un poder de excitar una polaridad en cuerpos que está en la misma dirección que las líneas en cuerpos paramagnéticos, y en la dirección inversa en cuerpos diamagnéticos[*]. De hecho, todavía no hemos llegado a ningún hecho que nos lleve a elegir a

[†]*Experimental Researches* (3292).

[‡]*Experimental Researches* (2797), (2798).Ver Thomson, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*. Mayo 1847.

[*]*Experimental Researches* (2429), (3320).Ver Weber, *Poggendorf*, LXXXVII, p. 145; Prof. Tyndall, *Phil. Trans*,

cualquiera de estas tres teorías, la de las líneas de fuerza, la de la materia magnética imaginaria y la de la polaridad inducida. Como la teoría de las líneas de fuerza admite la afirmación más precisa y, al mismo tiempo, menos teórica, le permitiremos representar el presente.

Teoría de la inducción magnetocristalina.

La teoría de Faraday[**] con respecto al comportamiento de los cristales en el campo magnético se puede establecer así. En ciertos cristales y otras sustancias, las líneas de fuerza magnética se dirigen con diferentes facilidades en diferentes direcciones. Un cuerpo cuando está suspendido en un campo magnético uniforme girará o tenderá a adoptar una posición tal, que las líneas de fuerza pasarán a través de él con la menor resistencia. No es difícil, mediante de los principios en (28) expresar las leyes que rigen para de este tipo de acción, e incluso reducirlas, en ciertos casos, a fórmulas numéricas. Los principios de la polaridad inducida y de la materia magnética imaginaria son aquí de poco uso; pero la teoría de las líneas de fuerza es capaz de la adaptación más perfecta a esta clase de fenómenos.

Teoría de la conducción de la corriente eléctrica

Es en el cálculo de las leyes de las corrientes eléctricas constantes que la teoría del movimiento fluido que hemos establecido admite la aplicación más directa. Además de las investigaciones de Ohm sobre este tema, tenemos las del Sr. Kirchhoff, *Ann. de Chim*. XLI. 496, y del Sr. Quincke, XLVII. 203, sobre la Conducción de Corrientes Eléctricas en Placas. De acuerdo con las opiniones recibidas, aquí tenemos una corriente de fluido que se mueve uniformemente en los circuitos conductores, que oponen una resistencia a la corriente que debe superarse mediante la aplicación de una fuerza electro-motriz en alguna parte del circuito. Debido a esta resistencia al movimiento del fluido, la presión debe ser diferente en diferentes puntos del circuito. Esta presión, que comúnmente se llama tensión eléctrica, se encuentra que es físicamente idéntica al potencial en la electricidad estática, y así tenemos los medios para conectar los dos conjuntos de fenómenos.

Si supiéramos qué cantidad de electricidad, medida estáticamente, pasa a lo largo de esa corriente que asumimos como nuestra unidad de corriente, entonces la conexión entre la electricidad debida a la tensión y la corriente eléctrica se completaría[***]. Hasta ahora, esto se ha hecho sólo aproximadamente, pero sabemos lo suficiente como para estar seguros de que los poderes conductores de diferentes sustancias difieren solo en sus grados y que la diferencia entre el vidrio y el metal es que la resistencia es una cantidad grande, pero finita, en el vidrio, y una cantidad muy pequeña, pero finita, en el metal. Así, la analogía entre la electricidad estática y el movimiento del fluido resulta más perfecta de lo que podríamos haber supuesto, ya que allí la inducción continúa

1856, p. 237.

[**] *Exp. Res*. (2836), etc.

[***] Ver *Exp. Res*. (371).

por conducción igual que en la electricidad real, pero la cantidad conducida es insensible debido a la gran resistencia de los dieléctricos[††].

Sobre las fuerzas electromotrices

Cuando existe una corriente uniforme en un circuito cerrado, es evidente que algunas otras fuerzas deben actuar sobre el fluido además de las presiones. Porque si la corriente se debiera a la diferencia de presiones, fluiría desde el punto de mayor presión en ambas direcciones hasta el punto de menor presión, mientras que en realidad circula constantemente en una dirección. Por lo tanto, debemos admitir la existencia de ciertas fuerzas capaces de mantener una corriente constante en un circuito cerrado. De estas, la más notable es la producida por la acción química. Una célula de una batería voltaica, o más bien la superficie de separación del fluido de la celda y el zinc, es el asiento de una fuerza electromotriz que puede mantener una corriente en oposición a la resistencia del circuito. Si adoptamos la convención usual al hablar de corrientes eléctricas, la corriente positiva es la que va desde el fluido a través del platino, el circuito conductor y el zinc y regresa al fluido nuevamente. Si la fuerza electromotriz actúa solo en la superficie de separación del fluido y el zinc, entonces la tensión de la electricidad en el fluido debe ser mayor que la del zinc en una cantidad que depende de la naturaleza y la longitud del circuito y de la potencia de la corriente. la corriente en el conductor.

Para mantener esta diferencia de presión, debe existir una fuerza electromotriz cuya intensidad se mide por esa diferencia de presión. Si F es la fuerza electromotriz, I la cantidad de la corriente o el número de unidades eléctricas entregadas en una unidad de tiempo, y K una cantidad que depende de la longitud y la resistencia del circuito conductor, entonces

$$F = IK = p - p'$$

Donde p es la tensión eléctrica en el fluido y p' en el cinc.

Si el circuito se corta en algún punto, como no hay corriente, la tensión de la parte que permanece adherida al platino será p, y la del otro será p', $p - p'$ o F brinda una medida de la intensidad de la corriente. Esta distinción de cantidad e intensidad es muy útil[*], pero debe entenderse claramente que significa nada más que esto: – La cantidad de una corriente es la cantidad de electricidad que transmite en una unidad de tiempo, y se mide por I el número de unidades de corriente que contiene. La intensidad de una corriente es su poder de superar la resistencia, y se mide mediante F o IK, donde K es la resistencia de todo el circuito.

La misma idea de cantidad e intensidad se puede aplicar al caso de magnetismo[†]. La cantidad de magnetización en cualquier sección de un cuerpo magnético se mide por el número de líneas de

[††]*Exp. Res*. Vol iii. p. 513.
[*]*Exp. Res*. Vol. iii. p. 519.
[†]*Exp. Res.* (2870) (3293)

fuerzas magnéticas que lo atraviesan. La intensidad de la magnetización en la sección depende del poder de resistencia de la sección, así como del número de líneas que la atraviesan. Si *h* es el poder de resistencia del material, *S* el área de la sección, e I el número de líneas de fuerza que pasan a través de él, entonces toda la intensidad a lo largo de la sección es

$$= F = I\frac{k}{s}$$

Cuando la magnetización se produce solamente por la influencia de otros imanes, podemos poner *p* para la tensión magnética en cualquier punto, luego para todo el solenoide magnético

$$F = I\int\frac{k}{s}dx = IK = p - p'$$

Cuando un circuito magnético solenoidal retorna a sí mismo, la magnetización no depende sólo de la diferencia de tensiones, sino de alguna fuerza de magnetización cuya intensidad es *F*.

Si *i* es la cantidad de magnetización en cualquier punto, o el número de líneas de fuerza que pasan a través de la unidad de área en la sección del solenoide, entonces la cantidad total de magnetización en el circuito es el número de líneas que pasan a través de cualquier sección, $I = \Sigma idydz$, donde *dydz* es el elemento de la sección, y la suma se realiza en toda la sección.

La intensidad de la magnetización en cualquier punto, o la fuerza requerida para mantener la magnetización, se mide por $ki = f$, y la intensidad total de la magnetización en el circuito se mide por la suma de las intensidades locales en todo el circuito,

$$F = \Sigma(fdx),$$

donde *dx* es el elemento de longitud en el circuito y la suma se extiende alrededor de todo el circuito.

En el mismo circuito siempre tenemos $F = IK$, donde *K* es la resistencia total del circuito y depende de su forma y de la materia de la que está compuesto.

Sobre la acción a distancia de circuitos cerrados

Las leyes matemáticas de las atracciones y repulsiones de los conductores han sido investigadas hábilmente por Ampère, y sus resultados han resistido la prueba de experimentos posteriores.

Partiendo de la única suposición de que la acción de un elemento de una corriente sobre un elemento de otra corriente es una fuerza atractiva o repulsiva que actúa en la dirección de la línea que une los dos elementos, Ampère ha determinado mediante los experimentos más simples la forma matemática dela ley de atracción, y ha puesto esta ley en varias formas muy elegantes y útiles. Sin embargo, debemos recordar que no se han realizado experimentos sobre estos elementos de las corrientes, excepto bajo la forma de corrientes cerradas, ya sea en conductores rígidos o en fluidos, y que las leyes de las corrientes cerradas solo pueden deducirse de tales experimentos. Por lo tanto, si las fórmulas de Ampere aplicadas a las corrientes cerradas dan resultados verdaderos, su verdad no está probada para los elementos de las corrientes a menos que supongamos que la acción entre dos elementos debe estar a lo largo de la línea que los une. Aunque esta suposición es más justificable y filosófica en el estado actual de la ciencia, será más conducente a la libertad de investigación si nos esforzamos por prescindir de ella, y suponemos a las leyes de las corrientes cerradas como el último dato del experimento.

Ampère ha demostrado que cuando las corrientes se combinan de acuerdo con la ley del paralelogramo de fuerzas, la fuerza debida a la corriente resultante es la resultante de las fuerzas debidas a las corrientes componentes, y que las corrientes iguales y opuestas generan fuerzas iguales y opuestas, y cuando se combinan se neutralizan entre sí.

También ha demostrado que un circuito cerrado de cualquier forma no tiene tendencia a hacer girar circularmente a un conductor móvil alrededor de un eje fijo a través del centro del círculo, perpendicular a su plano y que, por lo tanto, las fuerzas en el caso de un circuito cerrado cumplen$Xdx + Ydy + Zdz$, una diferencial exacta.

Finalmente, ha demostrado que si hay dos sistemas de circuitos similares y situados de manera similar, la cantidad de corriente eléctrica en los conductores correspondientes es la misma, las fuerzas resultantes son iguales, cualesquiera que sean las dimensiones absolutas de los sistemas, lo que prueba que las fuerzas son, *cæteris paribus*, inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia.

De estos resultados se deduce que la acción mutua entre dos corrientes cerradas, cuyas áreas son muy pequeñas, es la misma que la de dos barras magnéticas elementales magnetizadas perpendicularmente al plano de las corrientes.

La dirección de magnetización del imán equivalente puede predecirse recordando que una corriente que viaje alrededor de la Tierra de este a oeste, como parece hacerlo el Sol, sería equivalente a la magnetización que posee la Tierra, y por lo tanto en la dirección contraria a la de una aguja magnética cuando puede apuntar libremente.

Si, en una superficie, existe una cantidad de corrientes unitarias cerradas en contacto, entonces en todos los puntos en que dos corrientes están en contacto habrá dos corrientes iguales y opuestas que no producirán ningún efecto, pero a lo largo del límite de la superficie ocupada por las corrientes habrán una corriente residual no neutralizada por ninguna otra; y por lo tanto, el resultado será el mismo que el de una sola unidad de corriente alrededor del límite de todas las corrientes.

A partir de esto, parece que las atracciones externas de una capa uniformemente magnetizada perpendicular a su superficie son las mismas que las debidas a una corriente alrededor de su borde, ya que cada una de las corrientes elementales en el primer caso tiene el mismo efecto que un elemento magnético de la capa.

Si examinamos las líneas de fuerza magnética producidas por una corriente cerrada, veremos que forman curvas cerradas que pasan alrededor de la corriente y la abarcan, y que la intensidad total de la fuerza de magnetización a lo largo de la línea de fuerza cerrada depende, solamente, de la cantidad de corriente eléctrica. El número de líneas unitarias[*] de fuerza magnética debido a una corriente cerrada depende de la forma y de la cantidad de la corriente, pero el número de celdas unitarias[†] en cada línea de fuerza completa se mide simplemente por el número de corrientes unitarias que la abrazan. Las celdas unitarias en este caso son porciones de espacio en las cuales la unidad de la cantidad magnética es producida por la unidad de la fuerza de magnetización. Por lo tanto, la longitud de una celda es inversamente proporcional a la intensidad de la fuerza de magnetización, y su sección es inversamente proporcional a la cantidad de inducción magnética en ese punto.

Por lo tanto, el número total de celdas debidas a una corriente dada es proporcional a la intensidad de la corriente multiplicada por el número de líneas de fuerza que lo atraviesan. Si por algún cambio en la forma de los conductores se puede aumentar el número de celdas, habrá una fuerza que tiende a producir ese cambio, de modo que siempre hay una fuerza que impulsa a un conductor transversal a las líneas de fuerza magnética, a provocar que más líneas de fuerza pasen a través del circuito cerrado del cual el conductor forma parte.

El número de celdas debido a dos corrientes dadas se obtiene multiplicando el número de líneas de acción magnética inductiva que pasan a través de cada una por la cantidad de las corrientes, respectivamente. Ahora por (9) el número de líneas que pasan por la primera corriente es la suma de sus propias líneas y las de la segunda corriente que pasarían por la primera si la segunda corriente estuviera en acción. Por lo tanto, el número total de celdas aumentará con cualquier movimiento que provoque el paso de más líneas de fuerza a través de cualquiera de los circuitos y, por lo tanto, la fuerza resultante tenderá a producir dicho movimiento y el trabajo realizado por esta fuerza durante el movimiento, será medido por la cantidad de celdas nuevas producidas Todas las acciones de los conductores cerrados entre sí pueden deducirse de este principio.

Sobre las corrientes eléctricas producidas por inducción

Faraday ha demostrado[‡] que cuando un conductor se mueve transversalmente a las líneas de fuerza magnética, surge una fuerza electromotriz en el conductor, que tiende a producir una corriente en él. Si el conductor está cerrado, hay una corriente continua, si está abierto, el resultado es una tensión. Si un conductor cerrado se mueve transversalmente a las líneas de inducción magnética, entonces, si el número de líneas que lo atraviesan no cambia durante el movimiento, las fuerzas electromotrices en el circuito estarán en equilibrio, y no habrá corriente . Por lo tanto, las fuerzas electromotrices dependen del número de líneas que el conductor corta durante el movimiento. Si el movimiento es tal que un mayor número de líneas pasa a través del circuito

---

[*] *Exp. Res*. (3122). Ver Art. (6) en este trabajo
[††] Art. (13).
[‡] *Exp. Res*. (3077), etc.

formado por el conductor después, en vez que antes, del movimiento, entonces la fuerza electromotriz se medirá por el aumento del número de líneas, y generará una corriente en sentido inverso al que habrían producido las líneas adicionales. Cuando aumenta el número de líneas de acción magnética inductiva a través del circuito, la corriente inducida tenderá a disminuir el número de líneas, y cuando el número disminuye, la corriente inducida tenderá a aumentarlas.

Que esta es la verdadera expresión de la ley de las corrientes inducidas se desprende del hecho de que, de cualquier manera que se incremente el número de líneas de inducción magnética que pasan por el circuito, el efecto electro-motriz es el mismo, independientemente de si el aumento se produce o no por el movimiento del propio conductor, o de otros conductores, o de imanes, o por el cambio de intensidad de otras corrientes, o por la magnetización o desmagnetización de cuerpos magnéticos vecinos o ,por último, por el cambio de intensidad de la corriente misma.

En todos estos casos, la fuerza electromotriz depende del cambio en el número de líneas de acción magnética inductiva que pasan por el circuito.[*]

Es natural suponer que una fuerza de este tipo, que depende de un cambio en el número de líneas, se debe a un cambio de estado que se mide por el número de estas líneas. Se puede suponer que un conductor cerrado en un campo magnético se encuentra en un cierto estado que surge de la acción magnética. Mientras este estado permanezca invariable, no se produce ningún efecto, pero, cuando el estado cambia, surgen fuerzas electromotrices, cuya intensidad y dirección dependen de cambio de estado. No puedo hacer nada mejor que citar un pasaje de la primera serie de Investigaciones Experimentales de Faraday, Arte. (60).

"Si bien el cable está sujeto a inducción electrovoltaica o magneto-eléctrica, parece estar en un estado peculiar, ya que resiste la formación de una corriente eléctrica en él, mientras que, si en su condición común, dicha corriente se produjera, y cuando cesa su influencia tiene el poder de

[*] Las fuerzas electromagnéticas que tienden a producir el movimiento en el material conductor deben distinguirse cuidadosamente de las fuerzas electromotrices, que tienden a producir corrientes eléctricas.

Sea una corriente eléctrica que pasa a través de una masa de un metal de cualquier forma. La distribución de las corrientes dentro del metal estará determinada por las leyes de conducción. Ahora hagas pasar una corriente eléctrica constante a través de otro conductor cerca del primero. Si las dos corrientes están en la misma dirección, los dos conductores se atraerán y se acercarán si no se los mantiene en sus posiciones. Pero a pesar de que los materiales de los conductores son atraídos, las corrientes (que son libres de elegir cualquier camino dentro del metal) no alterarán su distribución original, ni se inclinarán entre sí. Porque, dado que no se produce ningún cambio en el sistema, no habrá fuerzas electromotrices para modificar la distribución original de las corrientes.

En este caso, tenemos fuerzas electromagnéticas que actúan sobre el material del conductor, sin que ninguna fuerza electromotriz tienda a modificar la corriente que transporta.

Tomemos como otro ejemplo el caso de un conductor lineal, que no forma un circuito cerrado, y hagamos que atraviese las líneas de fuerza magnética, ya sea por su propio movimiento o por cambios en el campo magnético. Una fuerza electromotriz actuará en la dirección del conductor y, como no puede producir una corriente, porque no hay circuito, producirá tensión eléctrica en las extremidades.

No habrá atracción electromagnética en el conductor del material, ya que esta atracción depende de la existencia de la corriente en su interior, y esto se evita porque el circuito no es cerrado.

Aquí tenemos el caso opuesto de una fuerza electromotriz que actúa sobre la electricidad en el conductor, pero no tiene atracción sobre sus partículas materiales.

originar una corriente, una potencia que el cable no posee en circunstancias normales. Esta condición eléctrica de la materia no ha sido reconocida hasta ahora, pero probablemente ejerce una influencia muy importante en muchos, — si no en la mayoría—,de los fenómenos producidos por las corrientes eléctricas. Por razones que aparecerán inmediatamente (7), después de haber consultado con varios amigos eruditos, me he aventurado a designarlo como el estado electrotónico". Al descubrir que todos los fenómenos podrían explicarse de otra manera sin referencia al estado electrotónico, Faraday en su segunda serie lo rechazó como innecesario; pero en sus investigaciones recientes[**] parece que todavía piensa que puede haber alguna verdad física en su conjetura sobre este nuevo estado de los cuerpos.

La conjetura de un filósofo tan familiarizado con la naturaleza a veces puede estar más preñada de la verdad que la ley experimental mejor establecida descubierta por los investigadores empíricos, y aunque no estamos obligados a admitirla como una verdad física, podemos aceptarla como una nueva idea mediante la cual las concepciones matemáticas pueden hacerse más claras.

En este esquema de las teorías eléctricas de Faraday, tal como aparecen desde un punto de vista matemático, no puedo hacer más que exponer,simplemente,los métodos matemáticos mediante los cuales creo que los fenómenos eléctricos pueden comprenderse mejor y reducirse al cálculo, y mi objetivo ha sido presentar las ideas matemáticas a la mente en una forma representada, como sistemas de líneas o superficies, y no como meros símbolos, que no transmiten las mismas ideas, ni se adaptan fácilmente a los fenómenos que se van a explicar. La idea del estado electrotónico, sin embargo, aún no se me ha presentado de tal forma que su naturaleza y propiedades puedan explicarse claramente sin referencia a meros símbolos, y por lo tanto propongo en la siguiente investigación usar símbolos libremente y dar por sentado las operaciones matemáticas ordinarias.

Mediante un estudio cuidadoso de las leyes de los sólidos elásticos y de los movimientos de los fluidos viscosos, espero descubrir un método para formar una concepción mecánica de este estado electrotónico adaptado al razonamiento general.[***]

[**](3172) (3269).

[***]Ver Prof W. Thomson *On a Mechanical Representation of Electric, Magnetic and Galvanic Forces, Camb. and Dub. Math. Jour*. Enero 1847.

PARTE II

Sobre el estado electrotónico de Faraday

Cuando un conductor se mueve cerca de una corriente de electricidad o de un imán, o cuando una corriente o un imán se mueve cerca del conductor, o se altera su intensidad, entonces una fuerza actúa sobre el conductor y produce tensión eléctrica, o una corriente continua, según que el circuito esté abierto o cerrado. Esta corriente se produce sólo por los cambios de los fenómenos eléctricos o magnéticos que rodean al conductor, y siempre que estos sean constantes, no se observa ningún efecto sobre el conductor. El conductor todavía está en diferentes estados cuando está cerca de una corriente o imán, y cuando está lejos de su influencia, ya que la eliminación o destrucción de la corriente o el imán ocasiona una corriente, que no habría existido si el imán o la corriente no hubieran estado previamente en acción.

Consideraciones de este tipo llevaron al profesor Faraday a conectar con su descubrimiento de la inducción de corrientes eléctricas, la concepción de un estado en el que todos los cuerpos reaccionan por la presencia de imanes y corrientes. Este estado no se manifiesta por ningún fenómeno conocido mientras no se altere, pero cualquier cambio en este estado se indica por una corriente o tendencia hacia una corriente. A este estado le dio el nombre de "Estado Electro-tónico", y aunque después logró explicar los fenómenos que lo sugerían por medio de concepciones menos hipotéticas, en varias ocasiones ha insinuado la probabilidad de que algunos fenómenos puedan ser descubiertos, lo que convertiría al estado electrotónico en un objeto de inducción legítima.

Estas especulaciones, a las cuales Faraday había sido llevado por el estudio de leyes que él había establecido bien y que abandonó sólo por falta de datos experimentales para la prueba directa de ese estado desconocido, no han sido, creo, objeto de investigación matemática. Quizás se pueda pensar que las determinaciones cuantitativas de los diversos fenómenos no son lo suficientemente rigurosas como para constituir la base de una teoría matemática; sin embargo, Faraday no se contentó con establecer simplemente los resultados numéricos de sus experimentos y dejar que la ley sea descubierta mediante el cálculo. Donde él percibió una ley, la enunció de inmediato, en términos tan inequívocos como los de las matemáticas puras; y si el matemático, al recibir esto como una verdad física, deduce de ella otras leyes capaces de ser probadas experimentalmente, simplemente ha ayudado al físico a organizar sus propias ideas, lo cual es, evidentemente, un paso necesario en el proceso de inducción científica.

Por lo tanto, en la siguiente investigación, las leyes establecidas por Faraday serán supuestas como verdaderas, y se demostrará que, al seguir sus especulaciones, se pueden deducir de ellas otras leyes más generales. Si parece que estas leyes, originalmente concebidas para incluir un conjunto de fenómenos, pueden generalizarse de modo que se extiendan a fenómenos de una clase diferente, estas conexiones matemáticas pueden sugerir a los físicos los medios para establecer conexiones físicas; y, por lo tanto, la mera especulación puede convertirse en una explicación mediante la ciencia experimental.

Sobre la cantidad y la intensidad como propiedades de las corrientes eléctricas

Se encuentra que ciertos efectos de una corriente eléctrica son iguales en cualquier parte del circuito que se estiman. Las cantidades de agua o de cualquier otro electrolito descompuesto en dos secciones diferentes del mismo circuito, siempre se encuentran iguales o equivalentes, por diferentes que sean el material y la forma del circuito en las dos secciones. El efecto magnético de un cable conductor también se encuentra independiente de la forma o del material del cable en el mismo circuito. Por lo tanto, hay un efecto eléctrico que es el mismo en cada sección del circuito. Si concebimos al conductor como un canal a lo largo del cual un fluido se ve obligado a moverse, entonces la cantidad de fluido transmitida por cada sección será la misma, y podemos definir la cantidad de una corriente eléctrica como la cantidad de electricidad que pasa a través de una sección completa de la corriente en la unidad de tiempo. Por el momento, podemos medir la cantidad de electricidad que circula por la cantidad de agua que se descompondría en una unidad de tiempo.

Para expresar matemáticamente las corrientes eléctricas en cualquier conductor, debemos tener una definición, no solo de todo el flujo a través de una sección completa, sino también del flujo en un punto dado en una dirección dada.

Definición: La cantidad de corriente en un punto dado y en una dirección dada se mide, cuando es uniforme, por la cantidad de electricidad que fluye a través de la unidad de área tomada en ese punto perpendicular a la dirección dada, y cuando es variable por la cantidad que fluiría a través de esta área, suponiendo que el flujo es uniformemente el mismo que en el punto dado.

En la siguiente investigación, la cantidad de corriente eléctrica en el punto (xyz) estimada en las direcciones de los ejes x, y, z, respectivamente, se denotará por a_2, b_2, c_2.

La cantidad de electricidad que fluye en una unidad de tiempo a través del área elemental dSserá

$$= dS\,(la_2 + mb_2 + nc_2),$$

donde$l$, m, n son los cosenos directores de la normal a dS. Este flujo de electricidad en cualquier punto de un conductor se debe a las fuerzas electromotrices que actúan en ese punto. Estas pueden ser externas o interna s.

Las fuerzas electromotrices externas surgen de los movimientos relativos de las corrientes y los imanes, o de los cambios en su intensidad, o de otras causas que actúan a distancia.

Las fuerzas electromotrices internas surgen principalmente de la diferencia de tensión eléctrica en los puntos del conductor en la vecindad inmediata del punto en cuestión. Las otras causas son variaciones de la composición química o de la temperatura en las partes contiguas del conductor.

Sea que p_2 represente la tensión eléctrica en cualquier punto, y X_2, Y_2, Z_2, las sumas de las partes de todas las fuerzas electromotrices que surgen de otras causas resueltas paralelamente a los ejes de coordenadas, entonces si α_2, β_2, γ_2 son las fuerzas electromotrices efectivas

$$\left.\begin{aligned}\alpha_2 &= X_2 - \frac{dp_2}{dx}\\ \beta_2 &= Y_2 - \frac{dp_2}{dy}\\ \gamma_2 &= Z_2 - \frac{dp_2}{dz}\end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Ahora, la cantidad de la corriente depende de la fuerza electromotriz y de la resistencia del medio. Si la resistencia del medio es uniforme en todas las direcciones e igual a k_2,

$$\alpha_2 = k_2 a_2\,, \quad \beta_2 = k_2 b_2\,, \gamma_2 = k_2 c_2 \qquad (B)$$

pero si la resistencia es diferente en diferentes direcciones, la ley será más complicada.

Estas cantidades α_2, β_2, γ_2, se pueden considerar como representativas de la intensidad de la acción eléctrica en las direcciones de x, y, z.

La intensidad medida a lo largo de un elemento $d\sigma$ de una curva está dada por

$$\varepsilon = l\alpha + m\beta + n\gamma$$

donde l, m ,n son los cosenos directores de la tangente

La integral $\int \varepsilon d\sigma$ tomada con respecto a una porción dada de una línea curva, representa la intensidad total a lo largo de esa línea. Si la curva es cerrada, representa la intensidad total de la fuerza electromotriz en la curva cerrada.

Sustituyendo los valores de α, β, γ de las ecuaciones (A)

$$\int \varepsilon d\sigma = \int (Xdx + Ydy + Zdz) - p + C$$

Por lo tanto, si (Xdx + Ydy + Zdz) es una diferencial exacta, el valor de $\int \varepsilon d\sigma$ para una curva cerrada se anulará, y en todas las curvas cerradas

$$\int \varepsilon d\sigma = \int (Xdx + Ydy + Zdz),$$

la integración se efectúa a lo largo de la curva, de modo que en una curva cerrada, la intensidad total de la fuerza electromotriz efectiva es igual a la intensidad total de la fuerza electromotriz impresa.

La cantidad total de conducción a través de cualquier superficie se expresa por

$$\int edS$$

fonde$\boldsymbol{e = la + mb + nc,}$

l, m, n son los cosenos directores de la normal,

$$\therefore \int edS = \iint adydz + \iint bdzdx + \iint cdxdy,$$

integracionesque se efectúan sobre la superficie dada. Cuando la superficie es cerrada, entonces, mediante la integración por partes, podemos encontrar

$$\int edS = \iiint \left(\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} \right) dxdydz$$

Si hacemos

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 4\pi\rho$$

$$\int edS = 4\pi \iiint \rho \, dxdydz \qquad (C)$$

donde la integración en el lado derecho de la ecuación se efectúa sobre cada parte del espacio dentro de la superficie. En una gran clase de fenómenos, incluidos todos los casos de corrientes uniformes, la cantidad ρ desaparece.

Cantidad magnética e intensidad

A partir de su estudio de las líneas de fuerza magnética, Faradayllegó a la conclusión de que en la superficie tubular[***] formada por un sistema de tales líneas, la cantidad de inducción magnética a través de cualquier sección del tubo es constante, y que la alteración del carácter de estas líneas al pasar de una sustancia a otra, se explica por una diferencia de capacidad inductiva en las dos sustancias, que es análoga a la potencia conductora en la teoría de las corrientes eléctricas.

En la siguiente investigación tendremos ocasión de tratar la cantidad y la intensidad magnética en relación con la eléctrica. En tales casos, los símbolos magnéticos se distinguirán por el sufijo 1, y los eléctricos por el sufijo 2. Las ecuaciones que conectan *a, b, c, k*, α, β, γ, *p* y ρ son iguales en la forma que los que acabamos de dar, *a, b, c* son los símbolos de la inducción magnética con respecto a la cantidad; *k* denota la resistencia a la inducción magnética, y puede ser diferente en diferentes

[***] *Exp. Res.* 3271, definición de " Sphondyloid."

direcciones; α, β, γ, son las fuerzas de magnetización efectivas, conectadas con *a, b, c,* mediante las ecuaciones (B); *p* es la tensión o potencial magnético que luego se explicará; ρ denota la densidad de la materia magnética real y está conectada con *a, b, c* por la ecuación (C). Como todos los detalles de los cálculos magnéticos serán más inteligibles después de la exposición de la conexión del magnetismo con la electricidad, aquísérá suficiente decir que todas las definiciones de cantidad total, con respecto a una superficie, la intensidad total respecto de una curva, se aplican tanto al caso del magnetismo como a la electricidad.

Electromagnetismo

Ampère ha demostrado las siguientes leyes de las atracciones y repulsiones de las corrientes eléctricas:

I. Las corrientes iguales y opuestas generan fuerzas iguales y opuestas.

II. Una corriente sinuosa es equivalente a una recta, siempre que las dos corrientes coincidan, prácticamente, en su longitud.

III. Las corrientes iguales que atraviesan curvas cerradas similares y situadas de manera similar actúan con las mismas fuerzas, cualesquiera sean las dimensiones lineales de los circuitos.

IV. Una corriente cerrada no ejerce ninguna fuerza que tienda a girar un conductor circular alrededor de su centro.

Debe observarse que las corrientes con las que Ampére trabajaba eran constantes y, por lo tanto, volvían a entrar. De modo que, todos sus resultados se deducen de experimentos sobre corrientes cerradas, y sus expresiones para la acción mutua de los elementos de una corriente implican la suposición de que esta acción se ejerce en la dirección de la línea que une esos elementos. Sin duda, esta suposición está garantizada por el consenso universal de los hombres de ciencia en el tratamiento de las fuerzas atractivas consideradas como debidas a la acción mutua de las partículas; pero al presente estamos procediendo con un principio diferente, y buscando la explicación de los fenómenos, no solo en las corrientes, sino también en el medio circundante. La primera y la segunda leyes muestran que las corrientes deben combinarse como velocidades o fuerzas. La tercera ley es la expresión de una propiedad de todas las atracciones que puede concebirse como dependiente de la inversa al cuadrado de la distancia de un sistema fijo de puntos; y la cuarta muestra que las fuerzas electromagnéticas siempre pueden reducirse a las atracciones y repulsiones de la materia imaginaria distribuidas adecuadamente.

De hecho, la acción de un circuito eléctrico muy pequeño en un punto de su vecindad es idéntica a la de un pequeño elemento magnético en un punto exterior. Si dividimos una porción determinada de una superficie en áreas elementales, y hacemos que corrientes iguales fluyan en la misma dirección alrededor de todas estas pequeñas áreas, el efecto en un punto que no está en la superficie será el mismo que el de una capa que coincide con el superficie, y uniformemente magnetizada normal a su superficie. Pero según la primera ley, todas las corrientes que forman los pequeños circuitos se destruirán entre sí, y dejarán una sola corriente corriendo alrededor de la línea divisoria. De modo que el efecto magnético de una capa uniformemente magnetizada es equivalente al de una corriente eléctrica que rodea el borde de la capa. Si la dirección de la corriente coincide con la del movimiento aparente del sol, entonces la dirección de la magnetización de la capa imaginaria será la misma que la de la magnetización real de la Tierra*.

La intensidad total de la fuerza de magnetización en una curva cerrada que atraviesa y abraza la corriente cerrada es constante, y por lo tanto se puede obtener una medida de la cantidad de la corriente. Como esta intensidad es independiente de la forma de la curva cerrada y depende solo de la cantidad de corriente que pasa a través de ella, podemos considerar el caso elemental de la corriente que fluye a través del área primaria *dy dz*.

Sea el eje *x* apuntando hacia el oeste, *z* hacia el sur, e *y* hacia arriba. Sean *x, y, z* las coordenadas de un punto en el medio del área *dy dz*, luego la intensidad total medida alrededor de los cuatro lados del elemento es

$$+\left(\beta_1+\frac{d\beta_1}{dz}\frac{dz}{2}\right)dy\,,$$

$$-\left(\gamma_1+\frac{d\gamma_1}{dy}\frac{dy}{2}\right)dz$$

$$-\left(\beta_1-\frac{d\beta_1}{dz}\frac{dz}{2}\right)dy$$

$$+\left(\gamma_1-\frac{d\gamma_1}{dy}\frac{dy}{2}\right)dz$$

$$\textit{Intensidad total} = \left(\frac{d\beta_1}{dz}-\frac{d\gamma_1}{dy}\right)dydz$$

La cantidad de electricidad conducida a través del área primaria *dy dz* es a_2dydz, y por lo tanto, si definimos la medida de una corriente eléctrica como la intensidad total de la fuerza de magnetización en una curva cerrada que la abraza, tendremos

$$a_2 = \left(\frac{d\beta_1}{dz}-\frac{d\gamma_1}{dy}\right)$$

$$b_2 = \left(\frac{d\gamma_1}{dx}-\frac{d\alpha_1}{dz}\right)$$

$$c_2 = \left(\frac{d\alpha_1}{dy}-\frac{d\beta_1}{dx}\right)$$

* Ver *EsperimentalResearches on Electricity* (3265) para las relaciones entre un circuito eléctrico y uno magnético considerados como curvas mutuamente abrazadas.

Estas ecuaciones nos permiten deducir la distribución de las corrientes de electricidad cada vez que conocemos los valores de α, β, γ, las intensidades magnéticas. Si α, β, γ son diferenciales exactos de una función de *x, y, z* con respecto a *x, y*az respectivamente, entonces los valores de a_2, b_2, $c_2$se anulan; y sabemos que el magnetismo no es producido por las corrientes eléctricas en esa parte del campo que estamos investigando. Se debe a la presencia de magnetismo permanente dentro del campo o a fuerzas de magnetización debidas a causas externas.

Podemos observar que las ecuaciones anteriores dan, por diferenciación

$$\frac{da_2}{dx}+\frac{db_2}{dy}+\frac{dc_2}{dz}=0$$

que es la ecuación de continuidad para las corrientes cerradas. Por lo tanto, nuestras investigaciones se limitan actualmente a las corrientes cerradas; y sabemos poco de los efectos magnéticos de las corrientes que no están cerradas.

Antes de entrar en el cálculo de estos estados eléctricos y magnéticos, puede ser ventajoso establecer ciertos teoremas generales, cuya verdad puede establecerse analíticamente.

Teorema I

La ecuación

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}+4\pi\rho=0$$

(donde y ρ son funciones de *x, y, z* nunca infinitas, y se anulan para todos los puntos a una distancia infinita), pueden ser satisfechas por uno, y solo un valor de *V*. Véase el art. (17) más arriba.

Teorema II

El valor de V que satisface las condiciones anteriores se encuentra integrando la expresión

$$\iiint \frac{\rho dxdydz}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{1/2}}$$

donde los límites de *x, y, z* son tales que incluyen cada punto del espacio donde ρ es finito.

Las pruebas de estos teoremas se pueden encontrar en cualquier trabajo sobre atracciones o electricidad, y en particular en el Ensayo de Green sobre la Aplicación de las Matemáticas a la Electricidad. Ver Arts. 18, 19 de este documento. Ver también Gauss, en Atracciones traducidas en Taylor'sScientificMemoirs.

Teorema III

Sean *U* y *V* dos funciones de *x, y, z,* luego

$$\iiint U\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)dxdydz=-\iiint U\left(\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy}+\frac{dU}{dz}\frac{dV}{dz}\right)dxdydz$$

$$=\iiint\left(\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}\right)Vdxdydz\,;$$

donde se supone que las integraciones se extienden a todo el espacio en el que *U* y *V* tienen valores que difieren de 0. (Green, p. 10.)

Este teorema muestra que si hay dos sistemas de atracción, las acciones entre ellos son iguales y opuestas. Y al hacer *U* = *V* encontramos que el potencial de un sistema en sí mismo es proporcional a la integral del cuadrado de la atracción resultante a través de todo el espacio; un resultado deducible del art. (30), ya que el volumen de cada celda es inversamente proporcional al cuadrado de la velocidad (artículos 12, 13) y, por lo tanto, el número de celdas en un espacio dado es directamente el cuadrado de la velocidad.

Teorema IV

Sean α, β, γ, cantidades finitas a través de un cierto espacio que desaparecen fuera del espacio, y sea k todas las partes del espacio como una función continua o discontinua de *x, y, z,* luego la ecuación en *p*

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{k}\left(\alpha-\frac{dp}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\frac{1}{k}\left(\beta-\frac{dp}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\frac{1}{k}\left(\gamma-\frac{dp}{dy}\right)+4\pi\rho=0$$

tiene una y solo una solución, en la que *p* siempre es finita y es nula a una distancia infinita.

La prueba de este teorema, por el Prof. W. Thomson, se puede encontrar en el Cambridge*and Dublin Mathematical Journal*, enero de 1848.

Si α, β, γ son las fuerzas electromotrices, *p* la tensión eléctrica y *k* el coeficiente de resistencia, entonces la ecuación anterior es idéntica a la ecuación de continuidad.

$$\frac{da_2}{dx}+\frac{db_2}{dy}+\frac{dc_2}{dz}+4\pi\rho=0$$

y el teorema muestra que cuando se dan las fuerzas electromotrices y la tasa de producción de electricidad en cada parte del espacio, el valor de la tensión eléctrica es determinado.

Dado que las leyes matemáticas del magnetismo son idénticas a las de la electricidad, por lo que ahora las consideramos, podemos considerar α, β,γ como fuerzas de magnetización, *p* como tensión magnética, y ρ como densidad magnética real, siendo *k* el coeficiente de resistencia a la inducción magnética.

La prueba de este teorema se basa sobre la determinación del valor mínimo de

$$Q = \iiint \left\{ \frac{1}{k}\left(\alpha - \frac{dp}{dx} - k\frac{dV}{dx}\right)^2 + \frac{1}{k}\left(\beta - \frac{dp}{dy} - k\frac{dV}{dy}\right)^2 + \frac{1}{k}\left(\gamma - \frac{dp}{dz} - k\frac{dV}{dz}\right)^2 \right\} dxdydz$$

donde *V* surge de la ecuación

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} + 4\pi\rho = 0$$

y *p* debe ser determinado.

El significado de esta integral en el lenguaje eléctrico se puede poner de manifiesto. Si la presencia de los medios en los que *k* tiene varios valores no afecta la distribución de las fuerzas, entonces la "cantidad" resuelta en *x* sería simplemente *dV*/*dx* y la intensidad *kdV*/*dx*. Pero la cantidad real y la intensidad son

$$\frac{1}{k}\left(\alpha - \frac{dp}{dx}\right) \text{y}\ \alpha - \frac{dp}{dx},$$

y las partes debidas a la distribución de los medios son, por lo tanto,

$$\frac{1}{k}\left(\alpha - \frac{dp}{dx}\right) - \frac{dV}{dx} \text{y}\ \alpha - \frac{dp}{dx} - k\frac{dV}{dx}$$

Ahora, estos productos representan el trabajo realizado a causa de esta distribución de medios, siendo determinada la distribución de las fuentes, y tomando en los términos en *y*y en *z* obtenemos la expresión *Q* para el trabajo total realizado por esa parte del efecto total en cualquier punto que se deba a la distribución de medios conductores, y no directamente a la presencia de las fuentes.

Esta cantidad *Q* se convierte en un mínimo para uno y solo un valor de *p*, es decir, aquel que satisface la ecuación original.

Teorema V

Si *a, b, c* son tres funciones de *x, y, z* que satisfacen la ecuación

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=0$$

siempre es posible encontrar tres funciones α, β, γ que satisfagan las ecuaciones

$$\frac{d\beta}{dz}-\frac{d\gamma}{dy}=a$$

$$\frac{d\gamma}{dx}-\frac{d\alpha}{dz}=b$$

$$\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\beta}{dx}=c$$

Sea A = $\int c\,dy$, donde la integración debe realizarse sobre c considerada como una función de y, tratando a x y z como constantes. Sean $B = \int a\,dz$, $C = \int b\,dx$, $A' = \int b\,dz$, $B' = \int c\,dx$, $C' = \int a\,dy$, integrando de la misma manera.

Entonces

$$\alpha = A + A' + \frac{d\psi}{dx}$$

$$\beta = B + B' + \frac{d\psi}{dy}$$

$$\gamma = C + C' + \frac{d\psi}{dz}$$

deben satisfacer las ecuaciones dadas por

$$\frac{d\beta}{dz}-\frac{d\gamma}{dy}=\int\frac{da}{dy}dz-\int\frac{dc}{dz}dx-\int\frac{db}{dy}dx+\int\frac{da}{dy}dy$$

y

$$0=\int\frac{da}{dx}dx+\int\frac{db}{dy}dx+\int\frac{dc}{dz}dx$$

$$\therefore\ \frac{d\beta}{dz}-\frac{d\gamma}{dy}=\int\frac{da}{dx}dx+\int\frac{da}{dy}dy+\int\frac{da}{dz}dz$$

$$=a$$

De la misma manera, se puede demostrar que los valores de α, β, γ satisfacen las otras ecuaciones dadas. La función ψ se puede considerar, realmente, como perfectamente indeterminada.

El método aquí dado está tomado de las memorias del Prof. W. Thomson sobre Magnetismo (*Phil Trans*. 1851, p 283).

Como no podemos realizar las integraciones requeridas cuando *a*, *b*, *c* son funciones discontinuas de *x*, *y*, *z*, el siguiente método, que es perfectamente general aunque más complicado, puede indicar más claramente la verdad de la proposición.

Sean *A*, *B*, *C* determinadas a partir de las ecuaciones

$$\frac{d^2A}{dx^2}+\frac{d^2A}{dy^2}+\frac{d^2A}{dz^2}+a=0$$
$$\frac{d^2B}{dx^2}+\frac{d^2B}{dy^2}+\frac{d^2B}{dz^2}+b=0$$
$$\frac{d^2C}{dx^2}+\frac{d^2C}{dy^2}+\frac{d^2C}{dz^2}+c=0$$

Por los métodos de los Teoremas I y II, de modo que *A*, *B*, *C* nunca sean infinitos, y se anulan cuando *x*, y o *z* son infinitos.

También hagamos

$$\alpha=\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}+\frac{d\psi}{dx}$$
$$\beta=\frac{dC}{dx}-\frac{dA}{dz}+\frac{d\psi}{dy}$$
$$\gamma=\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}+\frac{d\psi}{dz}$$

Entonces

$$\frac{d\beta}{dz}-\frac{d\gamma}{dy}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right)-\left(\frac{d^2A}{dx^2}+\frac{d^2A}{dy^2}+\frac{d^2A}{dz^2}\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right)+a$$

Si encontramos ecuaciones similares en *y* y en *z*, y diferenciamos la primera por *x*, la segunda por *y* y la tercera por *z*, recordando la relación entre *a*, *b*, *c*, tendremos

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right)=0$$

y dado que *A*, *B*, *C* son siempre finitos y se anulan a una distancia infinita, la única solución de esta ecuación es

$$\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right)=0$$

Y, finalmente, tenemos

$$\frac{d\beta}{dz}-\frac{d\gamma}{dy}=\alpha$$

con dos ecuaciones similares, demostrando que α, β, γ han sido correctamente determinadas.

La función ψ debe determinarse a partir de la condición

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)=\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)\psi$$

si el lado izquierdo de esta ecuación es siempre cero, ψ debe ser cero también.

Teorema VI

Sean *a, b, c* las tres funciones de *x, y, z,* es posible encontrar tres funciones α, β, γ y una cuarta *V*, de modo que

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0$$

y

$$a=\frac{d\beta}{dz}-\frac{d\gamma}{dy}+\frac{dV}{dx}$$
$$b=\frac{d\gamma}{dx}-\frac{d\alpha}{dz}+\frac{dV}{dy}$$
$$c=\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\beta}{dx}+\frac{dV}{dz}$$

Sea

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=-4\pi\rho$$

Y sea que *V* se encuentre a partir de la ecuación

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=-4\pi\rho$$

Entonces

$$a'=a-\frac{dV}{dx},$$
$$b'=b-\frac{dV}{dy},$$
$$c'=c-\frac{dV}{dz},$$

satisfacen la condición

$$\frac{da'}{dx}+\frac{db'}{dy}+\frac{dc'}{dz}=0$$

y, por lo tanto, podemos encontrar tres funciones *A*, *B*, *C* y de estas α, β, γ, a fin de satisfacer las ecuaciones dadas.

Teorema VII

La integral a lo largo del infinito*

$$Q=\iiint(\alpha_1 a_1+\beta_1 b_1+\gamma_1 c_1)\,dxdydz$$

dondea_1, b_1, c_1, α_1, β_1, γ_1 son funciones de cualquier tipo, es capaz de transformarse en

$$Q=+\iiint\left\{4\pi p\rho_1-(\alpha_0 a_2+\beta_0 b_2+\gamma_0 c_2)\right\}dxdydz$$

en que las cantidades se encuentran a partir de las ecuaciones

$$\frac{da_1}{dx}+\frac{db_1}{dy}+\frac{dc_1}{dz}+4\pi\rho_1=0$$
$$\frac{d\alpha_1}{dx}+\frac{d\beta_1}{dy}+\frac{d\gamma_1}{dz}+4\pi\rho'_1=0$$

α_0, β_0, γ_0, *V* se determinan a partir de a_1, b_1, c_1 por el último teorema, de modo que

* Entre 0 e ∞. (*N. del T.*)

$$a_1 = \frac{d\beta_0}{dz} - \frac{d\gamma_0}{dy} + \frac{dV}{dx}$$

a_2, b_2, c_2, se encuentran desde $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, por las ecuaciones

$$a_2 = \frac{d\beta_1}{dz} - \frac{d\gamma_1}{dy} \; etc.$$

y p se encuentra de la ecuación

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{d^2 p}{dy^2} + \frac{d^2 p}{dz^2} + 4\pi\rho'_1 = 0$$

Ya que si ponemos a_1 en la forma

$$\frac{d\beta_0}{dz} - \frac{d\gamma_0}{dy} + \frac{dV}{dx}$$

y tratamos b y c, de manera similar, entonces tenemos, mediante la integración por partes hasta el infinito, recordando que todas las funciones se desvanecen en los límites,

$$Q = -\iiint \left\{ V\left(\frac{d\alpha_1}{dx} + \frac{d\beta_1}{dx} + \frac{d\gamma_1}{dx}\right) + \alpha_0\left(\frac{d\beta_1}{dz} - \frac{d\gamma_1}{dy}\right) + \beta_0\left(\frac{d\gamma_1}{dx} - \frac{d\alpha_1}{dz}\right) + \gamma_0\left(\frac{d\alpha_1}{dy} - \frac{d\beta_1}{dx}\right) \right\} dxdydz$$

o

$$Q = +\iiint \left\{ (4\pi V\rho') - (\alpha_0 a_2 + \beta_0 b_2 + \gamma_0 c_2) \right\} dxdydz$$

y, por el Teorema III.

$$\iiint V\rho' \, dxdydz = \iiint p\rho dxdydz$$

de modo que, finalmente

$$Q = \iiint \left\{ 4\pi p\rho - (\alpha_0 a_2 + \beta_0 b_2 + \gamma_0 c_2) \right\} dxdydz$$

Si $a_1 b_1 c_1$ representan los componentes de la cantidad magnética, y $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ los de intensidad magnética, entonces ρ representará la densidad magnética real y p, el potencial magnético o tensión, $a_2 b_2 c_2$ serán los componentes de la cantidad de corrientes eléctricas, y $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ serán tres funciones deducidas de $a_1 b_1 c_1$, que se encontrará que es la expresión matemática del estado electrotónico de Faraday.

Consideremos ahora la influencia de estos teoremas analíticos en la teoría del magnetismo. Siempre que tratemos cantidades relacionadas con el magnetismo, las distinguiremos por el sufijo (1). Así $a_1b_1c_1$, son las componentes resueltas en las direcciones de x, y, z de la cantidad de inducción magnética que actúa a través de un punto dado, y $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ son las intensidades resueltas de la magnetización en el mismo punto, o lo que es lo mismo, los componentes de la fuerza que se ejercería sobre una unidad de polo sur de un imán colocado en ese punto sin perturbar la distribución del magnetismo.

Las corrientes eléctricas se encuentran a partir de las intensidades magnéticas por medio de las ecuaciones

$$a_2 = \frac{d\beta_1}{dz} - \frac{d\gamma_1}{dy}\ etc.$$

Cuando no hay corrientes eléctricas, entonces

$$\alpha_1 dx + \beta_1 dy + \gamma_1 dz = dp_1$$

una diferencial exacta de una función de x, y, z. Según el principio de analogía, podemos llamar a p_1, la tensión magnética.

Las fuerzas que actúan sobre una masa m de magnetismo sur en cualquier punto son:

$$-m\frac{dp_1}{dx},\ \ -m\frac{dp_1}{dy}\ \text{y}\ \ -m\frac{dp_1}{dz},$$

en la dirección de los ejes, y por lo tanto todo el trabajo realizado durante cualquier desplazamiento de un sistema magnético es igual a la disminución de la integral

$$Q = \iiint \rho_1 p_1 dxdydz$$

en todo el sistema.

Llamemos ahora a Q el potencial total del sistema en sí mismo. El aumento o disminución de Q medirá el trabajo perdido o ganado por cualquier desplazamiento de cualquier parte del sistema y, por lo tanto, nos permitirá determinar las fuerzas que actúan sobre esa parte del sistema.

Por el Teorema III. Q se puede poner bajo la forma

$$Q = +\frac{1}{4\pi}\iiint (a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1)dxdydz$$

en el que $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ son los coeficientes diferenciales de p_1 con respecto a x, y, z respectivamente.

Si ahora asumimos que esta expresión para Q es verdadera, cualesquiera que sean los valores de $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, pasamos de la consideración del magnetismo de los imanes permanentes a la de los efectos magnéticos de las corrientes eléctricas y, entonces, tenemos, por el teorema VII.

$$Q=\iiint\left\{p_1\rho_1-\frac{1}{4\pi}\left(\alpha_0 a_2+\beta_0 b_2+\gamma_0 c_2\right)\right\}dxdydz$$

De modo que, en el caso de las corrientes eléctricas, los componentes de las corrientes tienen que multiplicarse por las funciones α_0, β_0, γ_0, respectivamente, y las sumas de todos esos productos en todo el sistema nos dan la parte de Q debida a esas corrientes.

Ahora, hemos obtenido en las funciones α_0, β_0, γ_0, los medios para evitar la consideración de la cantidad de inducción magnética que *pasa a través* del circuito. En lugar de este método artificial, tenemos el natural, uno que considera la corriente con referencia a las cantidades existentes en el mismo espacio con la corriente misma. A estos les doy el nombre de *funciones Electrotónicas*, o *componentes de la intensidad Electrotónica*.

Consideremos ahora las condiciones de la conducción de la corriente eléctrica dentro del medio durante los cambios en el estado electrotónico. El método que adoptaremos es una aplicación de la dada por von Helmholtz en su memoria *Sobre la conservación de la Fuerza*[*] .

Sea que haya alguna fuente externa de corriente eléctrica que genere en las masas conductoras corrientes cuya cantidad se mide por a_2, b_2, c_2, y su intensidad en α_2, β_2, γ_2.

Entonces la cantidad de trabajo debido a esta causa en el tiempo dt es

$$dt\iiint\left(a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2\right)dxdydz$$

En forma de resistencia vencida y

$$\frac{dt}{4\pi}\frac{d}{dt}\iiint\left(a_2\alpha_0+b_2\beta_0+c_2\gamma_0\right)dxdydz$$

Como el trabajo realizado mecánicamente por la acción electromagnética de estas corrientes. Si no hay causa externa que produzca corrientes, entonces la cantidad que representa todo el trabajo realizado por la causa externa debe desaparecer, y tenemos

$$dt\iiint\left(a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2\right)dxdydz+\frac{dt}{4\pi}\frac{d}{dt}\iiint\left(a_2\alpha_0+b_2\beta_0+c_2\gamma_0\right)dxdydz$$

donde las integrales se toman a través de cualquier espacio arbitrario. Por lo tanto, debemos tener

---

[*]Traducido en Taylor's *New Scientific Memoirs*, Parte II.

$$\boldsymbol{a}_2\alpha_2+\boldsymbol{b}_2\beta_2+\boldsymbol{c}_2\gamma_2=\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{a}_2\alpha_0+\boldsymbol{b}_2\beta_0+\boldsymbol{c}_2\gamma_0\right)$$

para cada punto del espacio; y debe recordarse que la variación de Q se debe a variaciones de α_0, β_0, γ_0 y no de a_2, b_2, c_2. Por lo tanto, debemos tratar a_2, b_2, $c_2$como constantes, y la ecuación se vuelve

$$\boldsymbol{a}_2\left(\alpha_2+\frac{1}{4\pi}\frac{d\alpha_0}{dt}\right)+\boldsymbol{b}_2\left(\beta_2+\frac{1}{4\pi}\frac{d\beta_0}{dt}\right)+\boldsymbol{c}_2\left(\gamma_2+\frac{1}{4\pi}\frac{d\gamma_0}{dt}\right)=0$$

Para que esta ecuación pueda ser independiente de los valores de a_2, b_2, c_2, cada uno de estos coeficientes debe tener el mismo valor y, por lo tanto, tenemos las siguientes expresiones para las fuerzas electro-motrices debido a la acción de los imanes y las corrientes a una distancia, en términos de las funciones electrotónicas, es

$$\alpha_2=-\frac{1}{4\pi}\frac{d\alpha_0}{dt},\quad \beta_2=-\frac{1}{4\pi}\frac{d\beta_0}{dt},\quad \gamma_2=-\frac{1}{4\pi}\frac{d\gamma_0}{dt}$$

Del experimento, parece que la expresión $d\alpha_0/dt$ se refiere al cambio del estado electrotónico de *una partícula del conductor dada*, ya sea debido al cambio en las funciones electrotónicas en sí o al movimiento de la partícula.

Si α_0 se expresa como una función de *x, y, z* y *t*, y si *x, y, z* son las coordenadas de una partícula en movimiento, entonces la fuerza electromotriz medida en la dirección de *x* es

$$\alpha_2=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha_0}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{d\alpha_0}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{d\alpha_0}{dz}\frac{dz}{dt}+\frac{d\alpha_0}{dt}\right)$$

Las expresiones de las fuerzas electromotrices en *y* y en *z* son similares. La distribución de las corrientes debido a estas fuerzas depende de la forma y disposición de los medios conductores y de la tensión eléctrica resultante en cualquier punto.

La discusión de estas funciones nos involucraría en fórmulas matemáticas, de las cuales este documento ya está demasiado lleno. Su importancia física como expresión matemática de una de las conjeturas de Faraday, me han inducido a exhibirlas en su forma actual. Mediante una consideración más paciente de sus relaciones, y con la ayuda de aquellos que están comprometidos en investigaciones físicas tanto en este tema como en otros que no están, obviamente, relacionados, espero exhibir la teoría del estado electrotónico de una forma en la que todas sus relaciones pueden concebirse claramente sin referencia a cálculos analíticos.

***Resumen de la teoría del estado electro-tónico*.**

Podemos concebir el estado electrotónico en cualquier punto del espacio como una cantidad determinada en magnitud y dirección, y podemos representar la condición electrotónica de una parte del espacio mediante cualquier sistema mecánico que tenga en cada punto alguna cantidad, que puede ser una velocidad, un desplazamiento o una fuerza, cuya dirección y magnitud corresponden a las del supuesto estado electrotónico. Esta representación no implica una teoría física, es sólo un tipo de notación artificial. En investigaciones analíticas utilizamos los tres componentes del estado electrotónico y los llamamos funciones electro-tónicas.

Tomamos la parte resuelta de la intensidad electrotónica en cada punto de una curva cerrada, y encontramos por integración lo que podemos llamar la *intensidad electrotónica completa alrededor de la curva*.

Prop. I. Si en cualquier superficie se dibuja una curva cerrada, y si la superficie dentro de ella se divide en áreas pequeñas, entonces toda la intensidad alrededor de la curva cerrada es igual a la suma de las intensidades alrededor de cada una de las áreas pequeñas, todas estimadas en la misma dirección.

Porque, al recorrer las áreas pequeñas, cada línea límite entre dos de ellas se pasa dos veces en direcciones opuestas, y la intensidad ganada en un caso se pierde en el otro. Por lo tanto, todos los efectos de pasar a lo largo de las divisiones interiores se neutralizan, y todo el efecto es debido a la curva cerrada exterior.

Ley I. *Toda la intensidad electrotónica alrededor del límite de un elemento de superficie mide la cantidad de inducción magnética que pasa a través de esa superficie o, en otras palabras, el número de líneas de fuerzas magnéticas que atraviesan esa superficie*.

Según la Proposición I., parece que lo que es cierto para las superficies elementales también es verdadero para las superficies de magnitud finita, y, por lo tanto, dos superficies cualesquiera que estén limitadas por la misma curva cerrada tendrán la misma cantidad de inducción magnética a través de ellas.

Ley II. *La intensidad magnética en cualquier punto, está relacionada con la cantidad de inducción magnética por un conjunto de ecuaciones lineales, llamadas ecuaciones de conducción*[**].

Ley III. *La intensidad magnética completa alrededor del límite de cualquier superficie mide la cantidad de corriente eléctrica que pasa a través de esa superficie*.

Ley IV. *La cantidad y la intensidad de las corrientes eléctricas están conectadas por un sistema de ecuaciones de conducción*.

Mediante estas cuatro leyes se pueden deducir las cantidades y las intensidades eléctricas a partir de las funciones electrotónicas. No he discutido los valores de las unidades, ya que eso se hará mejor con referencia a los experimentos reales. Llegamos ahora a la atracción de conductores de corrientes, y a la inducción de corrientes dentro de conductores.

[**]Ver Art. (28).

Ley V. *El potencial electromagnético total de una corriente cerrada se mide por el producto de la cantidad de corriente y la intensidad electrotónica completa estimada en la misma dirección alrededor del circuito.*

Cualquier desplazamiento de los conductores que causaría un aumento en el potencial será asistido por una fuerza medida por la tasa de aumento del potencial, de modo que el trabajo mecánico realizado durante el desplazamiento se medirá por el aumento del potencial.

Aunque en ciertos casos un desplazamiento en la dirección o la alteración de la intensidad de la corriente podría aumentar el potencial, dicha alteración no produciría trabajo por sí misma, y no habrá tendencia hacia este desplazamiento, ya que las alteraciones en la corriente se deben a fuerzas electromotrices, no a las atracciones electromagnéticas, que solo pueden actuar sobre el conductor.

Ley VI. *La fuerza electromotriz en cualquier elemento de un conductor se mide por la velocidad instantánea de cambio de la intensidad electrotónica en ese elemento, ya sea en magnitud o dirección.*

La fuerza electromotriz en un conductor cerrado se mide por la velocidad de cambio de toda la intensidad electrotónica alrededor del circuito referida a la unidad de tiempo. Es independiente de la naturaleza del conductor, aunque la corriente producida varía inversamente a la resistencia; y es la misma en cualquier forma que se haya producido el cambio de intensidad electrotónica, ya sea por movimiento del conductor o por alteraciones en las circunstancias externas.

En estas seis leyes, me he esforzado por expresar la idea, que creo que es la base matemática de los modos de pensamiento indicados en las *Experimental Researches*. No creo que contenga ni siquiera la sombra de una verdadera teoría física; de hecho, su principal mérito como instrumento temporal de investigación es que no representa, ni siquiera en apariencia, nada.

Sin embargo, existe una teoría decididamente física de la electrodinámica, que es tan elegante, tan matemática, y tan completamente diferente de cualquier cosa en este documento, que debo expresar sus axiomas, a riesgo de repetir lo que debería ser bien conocido. Está contenida en las *Electrodynamischen Massbestimungen* del Sr. Wolhelm Weber, y puede encontrarse en las *Verhandlungen der Leibniz-Gesellschaft* y de la *Königlich Sächisischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*[*]. Las suposiciones son,

(1) Que dos partículas de electricidad cuando están en movimiento no se repelen entre sí con la misma fuerza que estando en reposo, pero que la fuerza se ve alterada por una cantidad que depende del movimiento relativo de las dos partículas, de modo que la expresión del repulsión a una distancia *r* es

[*]Cuando esto fue escrito, no sabía que parte de la Memoria del Sr. Weber se tradujo en Taylor's Scientific Memoirs, Vol v. Art. xiv. El valor de sus investigaciones, tanto experimentales como teóricas, hace que el estudio de su teoría sea necesario para todos los electricistas.

$$\frac{ee'}{r^2}\left(1+a\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+br\frac{d^2r}{dt^2}\right)$$

(2) Que cuando la electricidad se mueve en un conductor, la velocidad del fluido positivo con respecto a la materia del conductor es igual y opuesta a la del fluido negativo.

(3) La acción total de un elemento conductor sobre otro es la resultante de las acciones mutuas de las masas de electricidad de ambos tipos que están en cada uno.

(4) La fuerza electromotriz en cualquier punto es la diferencia de las fuerzas que actúan sobre los fluidos positivo y negativo.

De estos axiomas son deducibles las leyes de Ampère de la atracción de conductores, y las de Neumann y otros, para la inducción de corrientes. Aquí, pues, hay una teoría realmente física, que satisface mejor las condiciones requeridas que cualquier otra que haya sido inventada, y presentada por un filósofo cuyas investigaciones experimentales forman una base amplia para sus investigaciones matemáticas. ¿De qué sirve entonces imaginar un estado electrotónico del que no tenemos una concepción claramente física, en lugar de una fórmula de atracción que podamos comprender fácilmente? Yo respondería que es bueno tener dos formas de ver un tema y admitir que hay dos formas de verlo. Además, no creo que tengamos ningún derecho en este momento para entender la acción de la electricidad, y sostengo que el principal mérito de una teoría temporaria es que guiará el experimento, sin impedir el progreso de la teoría verdadera cuando aparezca. También hay objeciones a hacer que las fuerzas últimas en la naturaleza dependan de la velocidad de los cuerpos entre los que actúan. Si las fuerzas en la naturaleza deben reducirse a fuerzas que actúan entre partículas, el principio de la Conservación de la Fuerza requiere que estas fuerzas estén en la línea que une las partículas y que sean solamente funciones de las distancias. Los experimentos del Sr. Weber sobre la polaridad inversa de los cuerpos diamagneticos, que han sido repetidos recientemente por el profesor Tyndall, establecen un hecho que es igualmente una consecuencia de la teoría del Sr. Weber de la electricidad y de la teoría de las líneas de fuerza.

Con respecto de la historia de la presente teoría puedo afirmar que el reconocimiento de ciertas funciones matemáticas como expresión del "estado electro-tónico" de Faraday, y el uso de ellas para determinar potenciales electrodinámicos y fuerzas electromotrices es, hasta donde yo sé, original; pero la concepción distinta de la posibilidad de las expresiones matemáticas surgió en mi mente del examen de los artículos del Prof. W. Thomson "On a Mechanical Representation of Electric, Magnetic and Galvanic Forces.", *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, enero de 1847, y de su trabajo "On the Mathematical Theory of Magnetism", *Philosophical Transactions*, Part I. 1851, art. 78, y siguientes. Como ejemplo de la ayuda que puede derivarse de otras investigaciones físicas, puedo afirmar que después de haber investigado los teoremas de este documento, el profesor Stokes me señaló el uso que había hecho de expresiones similares en su "Dynamical Theory of Diffraction", "Sección 1, *Cambridge Transactions*, vol. ix. Parte 1. Queda por ver si la teoría de estas funciones, considerada con referencia a la electricidad, puede llevar a nuevas ideas matemáticas para ser empleadas en la investigación física. En el resto de este documento, propongo discutir algunos problemas eléctricos y magnéticos referidos a esferas. Estos están destinados meramente a servir como ejemplos concretos de los métodos de los cuales se ha dado la teoría; Me reservo la investigación detallada de casos elegidos con referencia especial a experimento hasta que tenga los medios para probar sus resultados.

Ejemplos

Teoría de las imágenes eléctricas

El método de Imágenes Eléctricas, debido al Prof. W. Thomson[†], por el cual la teoría de los conductores esféricos se ha reducido a una gran simplicidad geométrica, se vuelve aún más simple cuando vemos su conexión con los métodos de este documento. Hemos visto que la presión en cualquier punto en un medio uniforme, debido a un caparazón esférica (radio = α) produciendo un fluido a la velocidad de $4\pi P\alpha^2$ unidades por unidad de tiempo, es $kP\alpha^2/r$ fuera de la capa externa, y $kP\alpha$ dentro de ella, donde r es la distancia desde el centro de la esfera al punto en cuestión.

Si hay dos superficies, uno que expulsa fluido a una velocidad de $4\pi P\alpha^2$ y otra que absorbe fluido a la velocidad de $4\pi P'\alpha'^2$, la expresión de la presión, fuera de las capas, será

$$p = 4\pi P \frac{\alpha^2}{r} - 4\pi P' \frac{\alpha'^2}{r'} ,$$

Donde r y r' son las distancias desde los centros de las dos capas. Igualando esta expresión a cero tenemos, una superficie sin presión, para la cual

$$\frac{r'}{r} = \frac{P'\alpha'^2}{P\alpha^2}$$

Ahora la superficie, para la cual las distancias a dos puntos fijos tienen una relación dada, es una esfera de la cual el centro O está en la línea que une los centros de las capas CC 'producidas, de modo que

$$C'O = CC' \frac{\left(P'\alpha'^2\right)^2}{\left(P\alpha^2\right)^2 - \left(P'\alpha'^2\right)^2}$$

y su radio

$$CC' \frac{P\alpha^2 \times P'\alpha'^2}{\left(P\alpha^2\right)^2 - \left(P'\alpha'^2\right)^2}$$

[†] Ver la serie de trabajos "On the Mathematical Theory of Electricity," en el *Cambridge and Dublin Math. Jour.*, serie que comienza en marzo de 1848.

Si en el centro de esta esfera colocamos otra fuente del fluido, entonces la presión debida a esta fuente debe agregarse a la debida a las otras dos; y dado que esta presión adicional depende sólo de la distancia desde el centro, será constante en la superficie de la esfera, donde la presión debida a las otras dos fuentes es cero.

Ahora tenemos los medios para organizar un sistema de fuentes dentro de una esfera dada, de modo que cuando se combina con un sistema dado de fuentes fuera de la esfera, produzcan una presión constante dada en la superficie de la esfera.

Sea a el radio de la esfera, y p la presión dada, y sea que las fuentes dadas estén a las distancias b_1, b_2, etc. medidas desde el centro, y que sus tasas de producción sean $4\pi P_1$, $4\pi P_2$ ..., etc.

Luego, si a distancias a_2/b_1, a_2/b_2, etc., (medidas en la misma dirección que b_1, b_2, etc., desde el centro) colocamos fuentes negativas cuyas tasas de producción sean

$$-4\pi P_1 \frac{a}{b_1},\ -4\pi P_2 \frac{a}{b_2},\ \text{etc.}$$

la presión en la superficie $r = a$ se reducirá a cero. Ahora colocando una fuente $4\pi pa/k$ en el centro, la presión en la superficie será uniforme e igual a p.

La cantidad total de fluido emitido por la superficie $r = a$ se puede encontrar agregando las tasas de producción de las fuentes dentro de ella. El resultado es

$$4\pi a\left\{\frac{p}{k}-\frac{P_1}{b_1}-\frac{P_2}{b_2}-etc.\right\}$$

Para aplicar este resultado al caso de una esfera conductora, supongamos que las fuentes externas $4\pi P_1$, $4\pi P_2$…son cuerpos electrificados pequeños, que contienen e_1, e_2, …, de electricidad positiva. Supongamos también que toda la carga de la esfera conductora anterior a la acción de los puntos externos es igual a E. Entonces, todo lo que se necesita para la solución completa del problema es que la superficie de la esfera sea una superficie de igual potencial y que la carga total de la superficie sea E.

Si por cualquier distribución de fuentes imaginarias dentro de la superficie esférica podemos efectuar esto, el valor del potencial correspondiente fuera de la esfera es el verdadero y único. El potencial dentro de la esfera debe ser realmente constante e igual al de la superficie.

Por lo tanto, debemos encontrar las imágenes de los puntos electrificados externos, es decir, para cada punto a la distancia b del centro debemos encontrar un punto en el mismo radio a una distancia a^2/b_1, y en ese punto debemos colocar una cantidad = – ea/b_1, de electricidad imaginaria.

En el centro debemos poner una cantidad E' tal que

$$E' = E + e_1 \frac{a}{b_1} + e_2 \frac{a}{b_2} + etc.$$

Luego, si R es la distancia desde el centro, r_1,r_2, …, las distancias desde los puntos electrificados, y r'_1, r'_2,…, las distancias de sus imágenes, en cualquier punto fuera de la esfera, el potencial en ese punto será

$$p = \frac{E'}{R} + e_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{a}{b_1}\frac{1}{r'_1}\right) + e_2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{a}{b_2}\frac{1}{r'_2}\right) + etc.$$

$$= \frac{E}{R} + \frac{e_1}{b_1}\left(\frac{a}{R} + \frac{b_1}{r_1} - \frac{a}{r'_1}\right) + \frac{e_2}{b_2}\left(\frac{a}{R} + \frac{b_2}{r_2} - \frac{a}{r'_2}\right) + etc.$$

Este es el valor del potencial fuera de la esfera. En la superficie tenemos

$$R = a \text{ y } \frac{b_1}{r_1} = \frac{a}{r'_1},\ \frac{b_2}{r_2} - \frac{a}{r'_2}, etc.$$

De modo que en la superficie

$$p = \frac{E}{a} + \frac{e_1}{b_1} + \frac{e_2}{b_2} + etc.$$

y este también debe ser el valor de p para cualquier punto dentro de la esfera.

Para la aplicación del principio de las imágenes eléctricas, el lector puede consultar los trabajos del Prof. Thomson en el *Cambridge and DublinMathematicalJournal*. El único caso que consideraremos es aquel en que $e_1/b_1^2 = I$, y b_1 es infinitamente distante a lo largo del eje de x, y E = 0.

El valor de p fuera de la esfera se convierte entonces

$$p = Ix\left(-\frac{a^3}{r^3}\right)$$

y, en el interior $p = 0$

II. Sobre el efecto de una esfera paramagnética o diamagnética en un campo uniforme de fuerzas magnéticas.*

La expresión del potencial de un pequeño imán colocado en el origen de coordenadas, en la dirección del eje de x es

$$l\frac{d}{dx}\left(\frac{m}{r}\right) = -lm\frac{x}{r^3}$$

El efecto de la esfera en perturbar las líneas de fuerza puede suponerse, como una primera hipótesis, similar a la de un pequeño imán en el origen, cuya fuerza debe determinarse. (Encontraremos que esto es exactamente cierto).

Sea el valor del potencial no alterado por la presencia de la esfera sea

$$p = Ix.$$

Supongamos que la esfera produce un potencial adicional, que para los puntos externos es

$$p' = A\frac{a^3}{r^3}x_1$$

y sea el potencial en el interior de la esfera

$$p_1 = Bx.$$

Sea k'el coeficiente de resistencia exterior, y k dentro de la esfera, entonces las condiciones a cumplir son, que los potenciales interiores y exteriores deben coincidir en la superficie, y que la inducción a través de la superficie debe ser la misma según se deduzca del potencial externo o interno. Poniendo $x = r\cos\theta$, tenemos para el potencial externo

$$P = \left(Ir + A\frac{a^3}{r^3}\right)cos\,\theta$$

y para el potencial interno

$$p_1 = Br\cos\theta$$

y estos potenciales deben ser idénticos cuando $r = a$, o

* Ver Prof. Thomson, "On the Theory of Magnetic Induction", Phil Mag. March, 1851.De acuerdo con este trabajo, la capacidad inductiva de la esfera es la relación entre la cantidad de inducción magnética (no la intensidad) dentro de la esfera y la exterior a ella. Por lo tanto, de acuerdo con nuestra notación, ella es igual a

$$\frac{1}{I}B\frac{k'}{k} = \frac{3k'}{2k+k'}$$

$$I + A = B.$$

La inducción a través de la superficie en el medio externo es

$$\frac{1}{k'}\frac{dp}{dr_{r=a}} = \frac{1}{k'}(I - 2A)\cos\theta$$

y, a través de la superficie en el medio interno es

$$\frac{1}{k}\frac{dp_1}{dr_{r=a}} = \frac{1}{k}B\cos\theta$$

$$\therefore \frac{1}{k'}(I - 2A) = \frac{1}{k}B$$

Estas ecuaciones dan

$$A = \frac{k - k'}{2k + k'}I\ , \quad B = \frac{3k}{2k + k'}I\ .$$

El efecto fuera de la esfera es igual al de un pequeño imán cuya longitud es *l* y el momento *ml*, siempre que

$$ml = \frac{k - k'}{2k + k'}a^3 I$$

Supongamos que este campo uniforme es el debido al magnetismo terrestre, entonces, si *k* es menor que *k*'como en cuerpos paramagnéticos, el extremo marcado del imán equivalente se girará hacia el norte. Si *k* es mayor que *k*', como en los cuerpos diamagnéticos, el extremo no marcado del imán equivalente giraría hacia el norte.

III *Campo magnético de intensidad variable*

Supongamos que este campo uniforme es el debido al magnetismo terrestre, entonces, si *k* es menor, supongamos ahora que la intensidad en el campo magnético no alterado varía en magnitud y dirección de un punto a otro, y que sus componentes en *x, y, z* son representado por α, β, γ, entonces, si como primera aproximación consideramos que la intensidad dentro de la esfera es sensiblemente igual a la del centro, el cambio de potencial fuera de la esfera que surge de la presencia de la esfera, perturba las líneas de fuerza, será el mismo que el debido a tres pequeños imanes en el centro, con sus ejes paralelos a *x*, *y* y *z*, y sus momentos iguales a

$$\frac{k - k'}{2k + k'}a^3\alpha, \quad \frac{k - k'}{2k + k'}a^3\beta, \quad \frac{k - k'}{2k + k'}a^3\gamma\ .$$

La distribución real del potencial dentro y fuera de la esfera puede concebirse como el resultado de una distribución de materia magnética imaginaria en la superficie de la esfera; pero dado que el efecto externo de este magnetismo superficial es exactamente el mismo que el de los tres pequeños imanes en el centro, el efecto mecánico de las atracciones externas será el mismo que si realmente existieran los tres imanes.

Ahora, sean tres pequeños imanes cuyas longitudes son l_1, l_2, l_3 y las resistencias m_1, m_2, m_3, existentes en el punto x, y, z con sus ejes paralelos a los ejes de x, y, z, entonces resolviendo las fuerzas que actúan sobre los tres imanes en la dirección de X, tenemos

$$X = m_1\begin{Bmatrix} \alpha + \frac{d\alpha}{dx}\frac{l_1}{2} \\ -\alpha + \frac{d\alpha}{dx}\frac{l_1}{2} \end{Bmatrix} + m_2\begin{Bmatrix} \alpha + \frac{d\alpha}{dy}\frac{l_2}{2} \\ -\alpha + \frac{d\alpha}{dy}\frac{l_2}{2} \end{Bmatrix} + m_3\begin{Bmatrix} \alpha + \frac{d\alpha}{dz}\frac{l_3}{2} \\ -\alpha + \frac{d\alpha}{dz}\frac{l_3}{2} \end{Bmatrix}$$

$$= m_1 l_1 \frac{d\alpha}{dx} + m_2 l_2 \frac{d\alpha}{dy} + m_3 l_3 \frac{d\alpha}{dz}$$

Sustituyendo los valores de los momentos de los tres imanes imaginarios

$$-X = \frac{k-k'}{2k+k'}\alpha^2\left(\alpha\frac{d\alpha}{dx} + \beta\frac{d\beta}{dx} + \gamma\frac{d\gamma}{dx}\right)$$

$$= \frac{k-k'}{2k+k'}\frac{\alpha^2}{2}\frac{d}{dx}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)$$

La fuerza que impulsa la esfera en la dirección de x depende, por lo tanto, de la variación del cuadrado de la intensidad o ($\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$), a medida que avanzamos en la dirección de x, y lo mismo ocurre para yy para z, de modo que la ley es, que la fuerza que actúa sobre esferas diamagnéticas va dirigida desde lugares de mayor a lugares de menor intensidad de fuerza magnética, y que en distribuciones similares de fuerza magnética varía como la masa de la esfera y el cuadrado de la intensidad.

Con los coeficientes de Laplace es fácil llevar la aproximación al valor del potencial tanto como queramos, y calcular la atracción. Por ejemplo, si un polo magnético norte o sur cuya fuerza es M, se coloca a una distancia b de una esfera diamagnética, radio a, la repulsión será

$$R = M^2(k-k')\frac{a^3}{b^5}\left(\frac{2\times1}{2k+k'} + \frac{3\times2\times1}{3k+2k'}\frac{a^2}{b^2} + \frac{4\times3\times2\times1}{4k+3k'}\frac{a^4}{b^4} + etc.\right)$$

Cuando r es pequeño, el primer término da una aproximación suficiente. La repulsión es, entonces, directamente proporcional al cuadrado de la fuerza del polo, y la masa de la esfera e inversamente proporcional a la quinta potencia de la distancia, considerando al polo como un punto.

IV. *Dos esferas en un campo uniforme*

Sean dos esferas de radio *a* conectadas juntas de modo que sus centros se mantengan a una distancia *b*, y que están suspendidas en un campo magnético uniforme, luego, aunque cada esfera por sí misma habría estado en equilibrio en cualquier parte del campo, la perturbación del campo producirá fuerzas que tienden a hacer que las bolas se establezcan en una dirección particular.

Consideremos que el centro de una de las esferas se toma como origen, entonces el potencial inalterado es

$$p = I\, r \cos\theta$$

y el potencial debido a la esfera es $p' = I \dfrac{k-k'}{2k+k'} \dfrac{a^3}{r^2} cos\,\theta$

En conjunto, todo el potencial es igual a

$$I\left(r + \frac{k-k'}{2k+k'} \frac{a^3}{r^2} \right) cos\,\theta = p$$

$$\frac{dp}{dr} = I\left(1 - 2\frac{k-k'}{2k+k'} \frac{a^3}{r^2} \right) cos\,\theta$$

$$\frac{1}{r}\frac{dp}{d\theta} = -I\left(1 + \frac{k-k'}{2k+k'} \frac{a^3}{r^3} \right) sen\,\theta\,, \qquad \frac{dp}{d\phi} = 0$$

$$\therefore i^2 = \left(\frac{dp}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r\ sen^2\theta}\left(\frac{dp}{d\phi}\right)^2$$

$$= I^2\left\{ 1 + \frac{k-k'}{2k+k'} \frac{a^3}{r^3}\left(1 - 3cos^2\theta\right) + \left(\frac{k-k'}{2k+k'}\right)^2 \frac{a^5}{r^5}\left(1 + 3cos^2\theta\right) \right\}$$

Este es el valor del cuadrado de la intensidad en cualquier punto. El momentum de ambos cuerpos que tiende a retornar la combinación de esferas en la dirección de la fuerza original

$$L = \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta} i^2 \left(\frac{k-k'}{2k+k'} a^3 \right) \text{cuando} \boldsymbol{R = b}$$

$$L = \frac{3}{2} I^2 \left(\frac{k-k'}{2k+k'} \right)^2 \frac{a^6}{b^3} \left(1 - \frac{k-k'}{2k+k'} \frac{a^3}{b^3} \right) sin\,2\theta$$

Esta expresión, — que debe ser positiva, ya que *b* es mayor que *a*,— da el momento de una fuerza que tiende a retornar la línea que une los centros de las esferas hacia las líneas de fuerza originales.

Si las esferas son magnéticas o diamagnéticas, tienden a establecerse en la dirección axial, y eso sin distinción de norte a sur. Sin embargo, si una esfera es magnética y la otra diamagnética, la línea de centros se establecerá de forma ecuatorial. La magnitud de la fuerza depende del cuadrado de ($k - k'$), y por lo tanto es bastante insensible excepto para el hierro*.

V. *Dos esferas entre los polos de un imán*

Tomemos ahora el caso de las mismas esferas colocadas no en un campo uniforme sino entre un polo norte y un polo sur, $\pm M$, distantes $2c$ uno del otro en la dirección de x.

La expresión del potencial, tomando como origen la mitad de la línea que une los polos, es

$$p = \left(\frac{1}{\sqrt{c^2 + r^2 - 2cr\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{c^2 + r^2 + 2cr\cos\theta}} \right)$$

A partir de la cual, encontramos el valor de I^2

$$I^2 = \frac{4M^2}{c^4}\left(1 - 3\frac{r^2}{c^2} + 9\frac{r^2}{c^2}\cos^2\theta\right);$$

$$\therefore I\frac{dI}{d\theta} = -18\frac{M^2}{c^6}r^2\sin 2\theta\,.$$

y el momento para llevar el par de esferas (radio *a*, distancia 2*b*) en la dirección en que θ aumenta es

$$-36\frac{k-k'}{2k+k'}\frac{M^2a^3b^2}{c^6}\sin 2\theta$$

Esta fuerza, que tiende a girar en sentido ecuatorial a la línea que une los centros de las esferas diamagnéticas y en sentido axial a los centros de las esferas magnéticas, varía directamente como el cuadrado de la fuerza del imán, el cubo del radio de las esferas y el cuadrado de la distancia de sus centros. e inversamente a la sexta potencia de la distancia de los polos del imán, considerados como puntos. Mientras estos polos estén cerca uno del otro, esta acción de los polos será mucho más fuerte que la acción mutua de las esferas, de modo que como regla general podemos decir que los cuerpos alargados se colocan axial o ecuatorialmente entre los polos de un imán según sean magnéticos o diamagnéticos

*Ver Prof. Thomson in *Phil. Mag.*March, 1851.

VI. ***Sobre los fenómenos magnéticos de una esfera cortada de una sustancia cuyo coeficiente de resistencia es diferente en diferentes direcciones.***

Sean los ejes de la resistencia magnética paralelos en toda la esfera y sean *x, y, z* los ejes de la esfera. Sean k_1, k_2, k_3, los coeficientes de resistencia en estas tres direcciones, *k*' el coeficiente de resistencia del medio externo, y *a* el radio de la esfera. Sea que la intensidad magnética del campo en el que se introduce la esfera no es perturbada, y que sus cosenos directores sean *l, m, n*.

Tomemos ahora el caso de una esfera homogénea cuyo coeficiente es k_1, colocada en un campo magnético uniforme cuya intensidad es *lI* en la dirección de *x*.

El potencial resultante fuera de la esfera será

$$p' = lI\left(1 + \frac{k_1 - k'}{2k_1 + k'}\frac{a^3}{r^3}\right)x\,,$$

y, en los puntos internos

$$p_1 = lI\,\frac{3k_1}{2k_1 + k'}\,x\,.$$

De modo que en el interior de la esfera la magnetización está completamente en la dirección de *x*. Por lo tanto, es bastante independiente de los coeficientes de resistencia en las direcciones de *x* e *y*, que pueden cambiarse de k_1 a k_2 y k_3 sin perturbar esta distribución de magnetismo. Por lo tanto, podemos tratar la esfera como homogénea para cada uno de los tres componentes de *I*, pero debemos usar un coeficiente diferente para cada uno. Buscamos puntos externos

$$p' = I\left\{lx + my + nz + \left(\frac{k_1 - k'}{2k_1 + k'}lx + \frac{k_2 - k'}{2k_2 + k'}my + \frac{k_3 - k'}{2k_3 + k'}nz\,\frac{a^3}{r^3}\right)\right\}$$

Y, para puntos internos

$$p_1 = I\left(\frac{3k_1}{2k_1 + k'}lx + \frac{3k_2}{2k_2 + k'}my + \frac{3k_3}{2k_3 + k'}nz\right)$$

El efecto externo es el mismo que produciría un pequeño imán cuyos momentos fueran

$$\frac{k_1 - k'}{2k_1 + k'}lIa^3\,,\quad \frac{k_2 - k'}{2k_2 + k'}mIa^3\,,\quad \frac{k_3 - k'}{2k_3 + k'}nIa^3\,,$$

y hubiera sido colocado en el origen con sus direcciones coincidiendo con los ejes *x, y, z*. El efecto de la fuerza original *I* al girar la esfera sobre el eje de *x* se puede encontrar tomando los momentos de los componentes de esa fuerza en estos imanes equivalentes. El momento de la fuerza en la dirección de *y* que actúa sobre el tercer imán es

$$\frac{k_3 - k'}{2k_3 + k'} mnI^2 a^3$$

y el momento de la fuerza sobre el segundo imán, en la dirección del eje z, es

$$-\frac{k_2 - k'}{2k_2 + k'} mnI^2 a^3$$

Por lo tanto, como la pareja está sobre el eje de a,

$$\frac{3k'(k_3 - k_2)}{(2k_3 + k')(2k_2 + k')} mnI^2 a^3$$

tenderá a girar a la esfera desde el eje y hacia el eje z. Supongamos que la esfera se suspende de modo que el eje de x sea vertical, y que I sea horizontal, entonces si θ es el ángulo que el eje y forma con la dirección de I, $m = \cos\theta$, $n = -\sin\theta$, y la expresión para el momento se convierte en

$$\frac{3}{2} \frac{k'(k_2 - k_3)}{(2k_2 + k')(2k_3 + k')} I^2 a^3 \sin 2\theta,$$

tendiendo a aumentar θ. Por lo tanto, el eje de menor resistencia se establece axialmente, pero con cualquier extremo indiferentemente hacia el norte.

Como en todos los cuerpos, excepto el hierro, los valores de k son casi los mismos que en el vacío, el coeficiente de esta cantidad se modifica muy poco cambiando el valor de k' por k, el valor en el espacio. La expresión se convierte en

$$\frac{1}{6} \frac{k_2 - k_3}{k} I^2 a^3 \sin 2\theta,$$

que es independiente del medio exterior*.

---

*Tomando el caso más general de inducción magnética al que se refiere el art. (28), encontramos, en la expresión para el momento de las fuerzas magnéticas, un término constante que depende de T, además de los términos que dependen de los senos y cosenos de θ. El resultado es que en cada revolución completa en la dirección negativa alrededor del eje de T, se gana una cierta cantidad positiva de trabajo; pero, dado que no existe una fuente de trabajo inagotable en la naturaleza, debemos admitir que $T = 0$ en todas las sustancias, con respecto a la inducción magnética. Este argumento no se aplica en el caso de la conducción eléctrica, o en el caso de un cuerpo a través del cual pasa el calor o la electricidad, ya que dichos estados se mantienen mediante el gasto continuo de trabajo. Ver Prof. Thomson, *Phil. Mag.* Marzo de 1851, p. 186.

VII. *Imantación permanente en una capa esférica.*

El caso de una capa esférica homogénea de una sustancia diamagnética o paramagnética no presenta ninguna dificultad. La intensidad dentro de la capa en cuestión es menor de la que hubiera sido si la capa estuviera lejos, ya sea que la sustancia de esa capa sea diamagnética o paramagnética. Cuando la resistencia de la capa es infinita, y cuando desaparece, la intensidad en el interior la capa es cero.

En el caso de no resistencia, todo el efecto de la capa en cualquiera de sus puntos, internos o externos, puede representarse suponiendo un estrato superficial de materia magnética distribuido sobre la superficie exterior, la densidad está dada por la ecuación

$$\rho = 3I\cos\theta.$$

Supongamos que, ahora, que la capa esférica se convierte en un imán permanente, de modo que la distribución de la materia magnética imaginaria sea invariable, entonces el potencial externo debido a la capa será,

$$p' = -I\frac{a^3}{r^2}\cos\theta$$

y el potencial interno

$$p_1 = -Ir\cos\theta.$$

Ahora investiguemos el efecto de llenar la capa esférica con alguna sustancia cuya resistencia es k, y que la resistencia en el medio externo es k'. El grosor de la capa magnetizada puede descuidarse. Sea que el momento magnético del magnetismo permanente es Ia^3, y que el de la distribución superficial imaginaria debido al medio $k = Aa^3$ Entonces los potenciales son

$$\textit{externo} \quad p' = (I + A)\frac{a^3}{r^2}\cos\theta, \quad \textit{interno} \; p_1 = (I + A)r\cos\theta$$

La distribución del magnetismo real es la misma antes y después de la introducción del medio k, de modo que

$$\frac{1}{k'}I + \frac{2}{k}I = \frac{1}{k}(I + A) + \frac{2}{k'}(I + A)$$

o

$$A = \frac{k - k'}{2k + k'}L$$

El efecto externo de la cubierta magnetizada aumenta o disminuye de acuerdo con que A; sea mayor o menor que k'. Por lo tanto, se incrementa al llenar la capa esférica con materia diamagnética y disminuye al llenarlo con materia paramagnética, como el hierro.

VIII. *Capa esférica electromagnética*

Tomemos como ejemplo los efectos magnéticos de las corrientes eléctricas, un electroimán en forma de capa esférica delgada. Supongamos que su radio sea *a*, y su espesor *t*, y sea su efecto externo el de un imán cuyo momento es Ia^3. Tanto dentro como fuera dela capa, el efecto magnético puede ser representado por un potencial, pero dentro de la sustancia de la capa, donde hay corrientes eléctricas, los efectos magnéticos no pueden ser representados por un potencial. Sean *p*' y *p* los potenciales externos e internos,

$$p' = I\frac{a^3}{r^2}\cos\theta, \qquad p_1 = Ar\cos\theta$$

y, como no hay un magnetismo permanente

$$\frac{dp'}{dr} = \frac{dp_1}{dr},$$

Cuando $r = a$

$$A = -2I$$

Si dibujamos cualquier curva cerrada cortando a la capa en el ecuador, y en algún otro punto conocido, entonces la intensidad magnética total alrededor de esta curva será $3Ia\cos\theta$, y como esta es una medida de la corriente eléctrica total que fluye a través de ella, la cantidad de la corriente en cualquier punto se puede encontrar por diferenciación. La cantidad que fluye a través del elemento $td\theta$ es $-3Ia\sin\theta d\theta$, de modo que la cantidad de la corriente referida a la unidad del área de sección es

$$-3I\frac{a}{t}\sin\theta$$

Si la capa tiene un alambre enrollado alrededor de la esfera de modo que el número de espirales por pulgada varíe según el seno de θ, entonces el efecto externo será casi el mismo que si la capa estuviera hecha de una sustancia conductora uniforme, y las corrientes se hubieran distribuido de acuerdo con la ley que acabamos de dar.

Si un cable que conduce una corriente de intensidad *I*, se enrolla alrededor de una esfera de radio *a*, de modo que la distancia entre las espirales sucesivas, medidas a lo largo del eje de *x*, sea $2a/n$, entonces habrá *n* espirales en total, y el valor de *I*, para el electroimán resultante será

$$I_1 = \frac{n}{6a}I_r$$

Los potenciales interno y externo serán

$$p' = I_2 \frac{n}{6}\frac{a^3}{r^2}\cos\theta, \quad p_1 = -2I_2 \frac{n}{6}\frac{r}{a}\cos\theta,$$

Por lo tanto, el interior de la capa esférica es un campo magnético uniforme

IX. *Efecto del núcleo del electroimán*.

Supongamos ahora una esfera de materia diamagnética o paramagnética introducida en la bobina electromagnética. El resultado se puede obtener como en el último caso, y los potenciales se vuelven

$$p' = I_2 \frac{n}{6}\frac{3k'}{2k+k'}\frac{a^3}{r^2}\cos\theta, \qquad p_1 = -2I_2 \frac{n}{6}\frac{3k'}{2k+k'}\frac{r}{a}\cos\theta.$$

El efecto externo es mayor o menor que antes, de acuerdo con que *k*' sea mayor o menor que *k*, es decir, según que el interior de la esfera sea magnética o diamagnética con respecto al medio externo, y el efecto interno se altera en el dirección opuesta, siendo el más grande para un medio diamagnético.

Esta investigación explica el efecto de introducir un núcleo de hierro en un electroimán. Si el valor de *k* para el núcleo desapareciera por completo, el efecto del electroimán sería tres veces mayor que el que tiene sin el núcleo. Como *k* tiene siempre un valor finito, el efecto del núcleo es menor que esto.

En el interior del electroimán tenemos un campo uniforme de fuerza magnética, cuya intensidad puede aumentarse rodeando la bobina con una capa de hierro. Si *k*' = 0, y la capa es infinitamente gruesa, el efecto sobre los puntos internos se triplicaría.

El efecto del núcleo es mayor en el caso de un imán cilíndrico, y el más grande de todos cuando el núcleo es un anillo de hierro dulce.

X. *Funciones electrotónicas en electroimán esférico*.

Tratemos, ahora, de encontrar las funciones electrotónicas debido a este electroimán.

Ellas serán de la forma

$$\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = \omega z, \quad \gamma_0 = -\omega y$$

Donde ω es una función de *r*. Donde no hay corrientes eléctricas, debemos tener que a_2, b_2, c_2, cada una = 0, y esto implica

$$\frac{d}{dr}\left(3\omega + r\frac{d\omega}{dr}\right) = 0,$$

cuya solución es

$$\omega = C_1 + \frac{C_2}{r^3}.$$

Dentro de la capa, ω no puede ser infinito; por lo tanto ω = C_1 es la solución, y fuera de la capa debe anularse a una distancia infinita, por lo que

$$\omega = \frac{C_2}{r^3}$$

es la solución fuera de la capa. La cantidad magnética dentro de la capa se encuentra, a partir del último artículo como

$$-2I_2 \frac{n}{6a}\frac{3}{2k+k'} = a_1 = \frac{d\beta_0}{dz} - \frac{d\gamma_0}{dy} = 2C_1;$$

Por lo tanto, dentro de la esfera

$$\omega_0 = -\frac{I_2 n}{2a}\frac{1}{3k+k'}.$$

Fuera de la esfera debemos determinar ω para que coincida en la superficie con el valor interno. El valor externo es, por lo tanto

$$\omega = -\frac{I_2 n}{2a}\frac{1}{3k+k'}\frac{a^3}{r^3},$$

donde la capa que contiene las corrientes está compuesta de *n* bobinas de alambre, que conducen una corriente de cantidad total I_2.

Sea otro cable enrollado alrededor de la capa de acuerdo con la misma ley, y supongamos que el número total de bobinas sea *n*'; entonces la intensidad electrotónica total, EI_2, alrededor de la segunda bobina se encuentra integrando

$$EI_2 = \int_0^{2\pi} \omega a \sin\theta ds,$$

a lo largo de todo el cable. La ecuación para ese cable es

$$\cos\theta = \frac{\phi}{n'\pi}$$

donde *n’* es un número grande. Por ello,

$$ds = a\, sin\,\theta\, d\phi$$
$$= -an'\,\pi\, sin^2\,\theta\; d\theta$$

$$\therefore\; EI_2 = \frac{4\pi}{3}\omega a^2 n' = -\frac{2\pi}{3} ann'\, I\, \frac{1}{3k+k'}$$

E puede llamarse coeficiente electrotónico para el cable en particular.

XI. *Máquina electromagnética esférica a bobina*.

Ya hemos obtenido la función electrotónica que define la acción de una bobina sobre la otra. La acción de cada bobina sobre sí misma se encuentra poniendo n^2 o n'^2 en vez de nn'. Supongamos que la primera bobina se conecta con un aparato que produce una fuerza electromotriz variable *F*. Busquemos los efectos en ambos cables, suponiendo que sus resistencias totales sean *R* y *R*', y la cantidad de las corrientes *I* e *I*'.

Reemplazando $\frac{2\pi}{3}\frac{a}{(3k+k')}$ por *N*, la fuerza electromotriz de la primera bobina sobre la segunda es

$$-Nnn'\frac{dI}{dt}.$$

La de la segunda sobre sí misma es

$$-Nn'^2\frac{dI'}{dt}.$$

La ecuación que da la intensidad de corriente en la segunda bobina es

$$-Nnn'\frac{dI}{dt} - Nn'^2\frac{dI'}{dt} = R'\,I' \qquad (1)$$

Y la ecuación que da la intensidad de corriente en la primer bobina es

$$-Nn^2\frac{dI}{dt} - Nnn'\frac{dI'}{dt} + F = RI \qquad (2)$$

Eliminando los coeficientes diferenciales, tenemos

$$\frac{R}{n}I - \frac{R'}{n'}I' = \frac{F}{n},$$

y $$N\left(\frac{n^2}{R}+\frac{n'^2}{R'}\right)\frac{dI}{dt}+I=\frac{F}{R}+N\frac{n'^2}{R'}\frac{dF}{dt} \tag{3}$$

de donde se pueden encontrar I y I'. Para este propósito, necesitamos conocer el valor de F en términos de t.

Consideremos primero el caso en el que F es constante e I e I' son, inicialmente, cero. Este es el caso de una máquina electromagnética a bobina en el momento en que la conexión se realiza con el canal galvánico.

Poniendo ½ τ en vez de $N\left(\frac{n^2}{R}+\frac{n'^2}{R'}\right)$ encontramos

$$I=\frac{F}{R}\left(1-\varepsilon^{-\frac{2t}{\tau}}\right)$$

$$I'=-F\frac{n'}{R'n}\varepsilon^{-\frac{2t}{\tau}}$$

La corriente primaria aumenta muy rápidamente de 0 a F/R, y la secundaria comienza en $-Fn'/R'n$ y desaparece rápidamente, debido a que el valor de τ es generalmente muy pequeño.

Todo el trabajo realizado ya sea por la corriente en el calentamiento del cable o en cualquier otro tipo de acción se encuentra a partir de la expresión

$$\int_0^\infty I^2 R\,dt$$

La cantidad total de corriente es

$$\int_0^\infty I\,dt$$

Para la corriente secundaria encontramos

$$\int_0^\infty I^2 R'\,dt=\frac{F^2n'^2}{R'n^2}\frac{\tau}{4}, \qquad \int_0^\infty I'dt=\frac{Fn'}{R'n}\frac{\tau}{2}.$$

El trabajo realizado y la cantidad de corriente son, por lo tanto, los mismos que si una cantidad de corriente $I'=\frac{Fn'}{2R'n}$ hubiera pasado a través del cable durante un tiempo τ, donde

$$\tau=2N\left(\frac{n^2}{R}+\frac{n'^2}{R'}\right)$$

Este método de considerar una corriente variable de corta duración se debe a Weber, cuyos métodos experimentales hacen que la determinación de la corriente equivalente sea una cuestión de gran precisión.

Ahora supongamos que la fuerza electromotriz F cesa repentinamente mientras que la corriente en el cable primario es I_0, y en el secundario = 0. Entonces tendremos para el tiempo subsiguiente

$$I = I_0 \varepsilon^{-\frac{2t}{\tau}}, \qquad I' = \frac{I_0}{R'}\frac{Rn'}{n}\varepsilon^{-\frac{2t}{\tau}}.$$

Las corrientes equivalentes son $\frac{1}{2}I_0$ y $\frac{1}{2}I_0\frac{Rn'}{R'n}$ y su duración es τ.

Cuando se corta la comunicación con la fuente de la corriente, habrá un cambio en R. Esto producirá un cambio en el valor de τ, de modo que si R aumenta de repente, la intensidad de la corriente secundaria aumentará, y su duración disminuirá. Este es el caso en las máquinas a bobina ordinarias. La cantidad N depende de la forma de la máquina y puede determinarse experimentalmente para una máquina de cualquier forma.

XII. *Capa esférica girando en un campo magnético*.

Tomemos ahora el caso de una capa giratoria de materia conductora bajo la influencia de un campo de fuerza magnética uniforme. Los fenómenos son explicados por Faraday en sus *Experimental Researches*, Serie II., y se dan referencias a experimentos previos.

Sea el eje z el eje de revolución, y que la velocidad angular sea ω. Supongamos que el magnetismo del campo se represente en cantidad por I, inclinado en un ángulo θ en la dirección de z, en el plano de zx.

Sea R el radio de la capa esférica, y T el espesor. Sean las cantidades α_0, β_0, γ_0, las funciones electrotónicas en cualquier punto del espacio; a_1, b_1, c_1, α_1, β_1, γ_1, símbolos de cantidad e intensidad magnética; a_2, b_2, c_2, α_2, β_2, γ_2, de cantidad e intensidad eléctrica. Sea p_2 la tensión eléctrica en cualquier punto,

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{dp_2}{dx} + ka_2 \\ \beta_2 &= \frac{dp_2}{dy} + kb_2 \\ \gamma_2 &= \frac{dp_2}{dz} + kc_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\frac{da_2}{dx} + \frac{db_2}{dy} + \frac{dc_2}{dz} = 0 \qquad (2)$$

$$\therefore \quad \frac{d\alpha_2}{dx}+\frac{d\beta_2}{dy}+\frac{d\gamma_2}{dz}=\nabla^2 p$$

Las expresiones para α_0, β_0, γ_0, debidas al magnetismo del campo son

$$\alpha_0 = A_0 + \frac{I}{2} y \cos\theta$$

$$\beta_0 = B_0 + \frac{I}{2}(z \sin\theta - x\cos\theta)$$

$$\gamma_0 = C_0 \frac{I}{2} y \sin\theta$$

A_0, B_0, C_0 son constantes; y las velocidades de las partículas en la esfera giratoria son

$$\frac{dx}{dt}=-\omega y\,, \qquad \frac{dy}{dt}=\omega x\,, \quad \frac{dz}{dt}=0\,.$$

Por lo tanto, las fuerzas electromotrices son

$$\alpha_2 = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\alpha_0}{dt} = -\frac{1}{4\pi}\frac{I}{2}\cos\theta\omega x\,,$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\beta_0}{dt} = -\frac{1}{4\pi}\frac{I}{2}\cos\theta\omega y\,,$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\gamma_0}{dt} = \frac{1}{4\pi}\frac{I}{2}\sin\theta\omega x\,.$$

Volviendo a las ecuaciones (1) tenemos

$$k\left(\frac{db_2}{dz}-\frac{dc_2}{dy}\right)=\frac{d\beta_2}{dz}-\frac{d\gamma_2}{dy}=0\,,$$

$$k\left(\frac{dc_2}{dx}-\frac{da_2}{dz}\right)=\frac{d\gamma_2}{dx}-\frac{d\alpha_2}{dz}=\frac{1}{4\pi}\frac{I}{2}\sin\theta\omega\,,$$

$$k\left(\frac{da_2}{dy}-\frac{db_2}{dx}\right)=\frac{d\alpha_2}{dy}-\frac{d\beta_2}{dx}=0\,.$$

de donde, con la ecuación (2), encontramos

$$a_2 = -\frac{1}{k}\frac{1}{4\pi}\frac{I}{4} sin\,\theta\omega z\,,$$

$$b_2 = 0\,,$$

$$c_2 = -\frac{1}{k}\frac{1}{4\pi}\frac{I}{4} sin\,\theta\omega x$$

$$p_2 = -\frac{1}{16\pi} I\omega\left\{\left(x^2 + y^2\right)cos\,\theta - xz\,sin\,\theta\right\}$$

Estas expresiones determinarían completamente el movimiento de la electricidad en una esfera giratoria si despreciamos la acción de estas corrientes entre sí. Expresan un sistema de corrientes circulares alrededor del eje *y*, la cantidad de corriente en cualquier punto es proporcional a la distancia desde ese eje. El efecto magnético externo será el de un pequeño imán cuyo momento es $\frac{TR^3}{48\pi k}$ con su dirección a lo largo del eje *y*, de modo que el magnetismo del campo tenderá a volverlo al eje de *x*[*].

La existencia de estas corrientes, por supuesto, alterará la distribución de las funciones electrotónicas, por lo que reaccionarán sobre sí mismas. Sea el resultado final de esta acción un sistema de corrientes sobre un eje en el plano *xy* inclinado al eje de *x* en un ángulo ϕ y produciendo un efecto externo igual al de un imán cuyo momento es $I'R^3$.

Los componentes inductivos magnéticos dentro de la capa son

$$I_1\, sin\,\theta - 2I'\, cos\,\phi \;\; en\; x\,,$$
$$-2I'\, sin\,\phi \;\; en\; y\,,$$
$$I_1\, cos\,\phi \;\; en\; z\,.$$

Cada uno de estos produciría su propio sistema de corrientes cuando la esfera está en movimiento, y esto daría lugar a nuevas distribuciones de magnetismo, que, cuando la velocidad es uniforme, debe ser la misma que la distribución original,

$$\left(I_1\, sin\,\theta - 2I'\, cos\,\phi\right) en\; x\;\; produce\; 2\frac{T}{48\pi k}\omega\left(I_1\, sin\,\theta - 2I'\, cos\,\phi\right) en\; y\;\;,$$

$$\left(-2I'\, sin\,\phi\right) en\; y\;\; produce\; 2\frac{T}{48\pi k}\omega\left(2I'\, sin\,\phi\right) en\; x\;\;,$$

$$I_1\, cos\,\theta\; en\; z\; no\;\; produce\; corrientes$$

[*]La expresión para p_2 indica una tensión eléctrica variable en la capa, de modo que las corrientes pueden ser recogidas por cables que la tocan en el ecuador y los polos.

Por lo tanto, debemos tener las siguientes ecuaciones, ya que el estado de la capa es el mismo en cada instante,

$$I_1 \sin\theta - 2I' \cos\phi = I_1 \sin\theta + \frac{T}{24\pi k}\omega 2I' \sin\phi$$

$$-2I' \sin\theta = \frac{T}{24\pi k}\omega\left(I_1 \sin\theta - 2I' \cos\phi\right)$$

donde $$\cot\phi = -\frac{TR^2}{24\pi k}\omega, \qquad I' = \frac{1}{2}\frac{\frac{T}{4\pi k}}{\sqrt{1+\left(\frac{T}{4\pi k}\omega\right)^2}} I_1 \sin\theta.$$

Para entender el significado de estas expresiones, consideremos un caso particular. Supongamos que el eje de la cubierta giratoria sea vertical, y permita que la revolución sea de norte a oeste. Supongamos que la intensidad total es la del magnetismo terrestre, y que la inclinación sea θ, entonces I cosθ es la componente horizontal en la dirección del norte magnético.

El resultado de la rotación es producir corrientes en la capa alrededor de un eje inclinado en un ángulo pequeño $= \tan^{-1}\frac{T}{4\pi k}$ al sur del oeste magnético, y el efecto externo de estas corrientes es el mismo que el de un imán cuyo momento es

$$\frac{1}{2}\frac{T\omega}{\sqrt{(24\pi k)^2 + T^2\omega^2}} R^3 I \cos\theta$$

El momento del par debido al magnetismo terrestre que tiende a detener la rotación es

$$\frac{24\pi k}{2}\frac{T\omega}{\sqrt{(24\pi k)^2 + T^2\omega^2}} R^3 I^2 \cos^2\theta$$

y la pérdida de trabajo debido a esto en una unidad de tiempo es

$$\frac{24\pi k}{2}\frac{T\omega}{\sqrt{(24\pi k)^2 + T^2\omega^2}} R^3 I^2 \cos^2\theta$$

Esta pérdida de trabajo está compuesta por una evolución del calor en la sustancia de la capa, como lo demuestra un experimento reciente del Sr. Foucault (véase *Comptes Rendus*, XLI, p. 450)

TABLA DE MATERIAS

SOBRE LAS LÍNEAS DE FUERZA DE FARADAY	214
I. *Teoría del movimiento de un fluido incompresible*	217
II. *Teoría del movimiento uniforme de un fluido incompresible imponderable a través de un medio resistente*	220
Sobre las condiciones que debe cumplir una superficie que separa dos medios cuyos coeficientes de resistencia son k y k'.	224
Aplicación de la idea de líneas de fuerza	230
Teoría de los imanes permanentes	232
Teoría de la inducción paramagnética y diamagnética	233
Teoría de la inducción magnetocristalina	234
Teoría de la conducción de la corriente eléctrica	234
Sobre las fuerzas electromotrices	235
Sobre la acción a distancia de circuitos cerrados	236
Sobre las corrientes eléctricas producidas por inducción	238
PARTE II	241
Sobre el estado electrotónico de Faraday	241
Sobre la cantidad y la intensidad como propiedades de las corrientes eléctricas	242
Cantidad magnética e intensidad	244
Electromagnetismo	245
Teorema I	247
Teorema II	247
Teorema III	248
Teorema IV	248
Teorema V	249
Teorema VI	252
Teorema VII	257
Resumen de la teoría del estado electrotónico	259
Ejemplos	261
Teoría de las imágenes eléctricas	261
III *Campo magnético de intensidad variable*	265
IV *Dos esferas en un campo uniforme*	267
V *Dos esferas entre los polos de un imán*	268
VI *Sobre los fenómenos magnéticos de una esfera cortada de una sustancia cuyo coeficiente de resistencia es diferente en diferentes direcciones*	269

VII *Imantación permanente en una capa esférica* 271
VIII *Capa esférica electromagnética* 272
IX *Efecto del núcleo del electroimán* 273
X *Funciones electro-tónicas en electro-imán esférico* 273
XI *Máquina electromagnética esférica a bobina* 275
XII *Capa esférica girando en un campo magnético* 277

VIII[1]

A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field. By J. Clerk Maxwell*, F.R.S.*

Recibida el 27 de octubre — Leída el 8 de diciembre de 1864.

PARTE I .— INTRODUCCIÓN.

(1) El fenómeno mecánico más obvio en experimentos eléctricos y magnéticos es la acción mutua mediante la cual los cuerpos en ciertos estados se ponen en movimiento mientras se encuentran a una distancia razonable entre sí. El primer paso, por lo tanto, en la reducción de estos fenómenos a la forma científica, es determinar la magnitud y la dirección de la fuerza que actúa entre los cuerpos, y cuando se encuentra que esta fuerza depende de cierta manera de la posición relativa de los cuerpos y de la condición eléctrica o magnética de los cuerpos. A primera vista. parece natural explicar los hechos al asumir la existencia de algo, ya sea en reposo o en movimiento en cada cuerpo, constituyendo su estado eléctrico o magnético, y capaz de actuar a distancia de acuerdo con ciertas leyes matemáticas.

De esta forma se han elaborado teorías matemáticas de la electricidad estática, del magnetismo, de la acción mecánica entre conductores que transportan corrientes y de la inducción de corrientes. En estas teorías, la fuerza que actúa entre los dos cuerpos se trata con referencia solo a las condiciones de los cuerpos y a sus posiciones relativas y sin ninguna consideración expresa del medio circundante.

Estas teorías suponen, más o menos explícitamente, la existencia de sustancias, cuyas partículas tienen la propiedad de actuar unas sobre otras, a distancia, por atracción o repulsión. El desarrollo más completo de una teoría de este tipo es el del Sr. W. Weber[*], que ha hecho que la misma teoría incluya fenómenos electrostáticos y electromagnéticos.

Sin embargo, al hacerlo, ha encontrado necesario suponer que la fuerza entre dos partículas eléctricas depende de sus velocidades relativas, así como la distancia que media entre ellas.

Esta teoría, tal como fue desarrollada por los Sres. W. Weber y C. Neumann[†], es extremadamente ingeniosa y maravillosamente completa en su aplicación a los fenómenos de electricidad estática, atracciones electromagnéticas, inducción de corrientes y fenómenos

[1] En sus trabajos, Maxwell no sólo omitía pasos en sus desarrollos matemáticos sino que descuidaba la expresión gramatical de sus pensamientos. Tratando de ser lo más fiel posible, la traducción del presente fue realizada sobre el texto publicado en The Scientific Papers of James Clerk Maxwell, Dover Publications Inc., New York, 1965, pp. 526 – 597.

[*] "Electrodynamische Maassbestimmungen", *Leipzic Trans*, vol. i. 1849, y ***Taylor's Scientific Memoirs,*** vol. v. art. xiv.

[†] "*Explicare tentatur quomodo fiat ut lucis planum polarizationis per vires electricas vel magneticas declinetur."*— Halis Saxonum, 1858.

diamagnéticos; y nos llega con más autoridad, ya que ha servido para guiar las especulaciones de alguien que ha hecho un gran avance en la parte práctica de la ciencia eléctrica, tanto al introducir un sistema consistente de unidades en la medición eléctrica, como por la realidad de determinar cantidades eléctricas con una precisión hasta ahora desconocida.

(2) Sin embargo, las dificultades mecánicas que están involucradas en la suposición de que las partículas actúan a distancia con fuerzas que dependen de sus velocidades, son tales que me impiden considerar esta teoría como la última, aunque pudo haber sido, y puede ser útil para conducir a la coordinación de fenómenos.

Por lo tanto, he preferido buscar una explicación del hecho en otra dirección, mediante la suposición que son producidos por acciones que ocurren tanto en el medio circundante como en los cuerpos excitados, y tratando de explicar la acción entre cuerpos distantes sin asumir la existencia de fuerzas capaces de actuar directamente a distancias sensibles.

(3) Por lo tanto, la teoría que propongo puede llamarse teoría del campo electromagnético, porque tiene que ver con el espacio en la vecindad de los cuerpos eléctricos o magnéticos, y también puede llamarse Teoría Dinámica, porque supone que en ese espacio hay materia en movimiento, mediante la cual se producen los fenómenos electromagnéticos observados.

(4) El campo electromagnético es la parte del espacio que contiene y rodea cuerpos en condiciones eléctricas o magnéticas.

Puede llenarse con cualquier tipo de materia, o podemos tratar de mantenerlo vacío de toda la materia densa, como en el caso de los tubos de Geissler u otros llamados *vacua*.

Sin embargo, siempre queda suficiente materia para recibir y transmitir las ondulaciones de la luz y el calor, y es porque la transmisión de estas radiaciones no se altera mucho cuando se sustituyen los cuerpos transparentes de densidad medible por el llamado vacío, por lo que estamos obligados a admitir que las ondulaciones son las de una sustancia etérea, y no de la materia densa, cuya presencia simplemente modifica de algún modo el movimiento del éter.

Por lo tanto, tenemos alguna razón para creer, a partir de los fenómenos de la luz y el calor, que hay un medio fijo que llena el espacio y que atraviesa los cuerpos, que puede ponerse en movimiento y transmitir ese movimiento de una parte a otra y comunicar ese movimiento a la materia densa para calentarla y afectarla de varias maneras.

(5) Ahora, la energía comunicada al cuerpo al calentarlo debió haber existido anteriormente en el medio móvil, ya que las ondulaciones habían dejado la fuente de calor algún tiempo antes de llegar al cuerpo, y durante ese tiempo la energía debe haber sido la mitad en forma de movimiento del medio y la mitad en forma de resiliencia elástica. De estas consideraciones el Profesor W.

Thomson ha argumentado[*] que el medio debe tener una densidad capaz de compararse con la materia densa e incluso ha asignado un límite inferior a esa densidad.

6) Por lo tanto, podemos recibir, como un dato derivado de una rama de la ciencia independiente de la que tenemos que tratar, la existencia de un medio penetrante, de densidad pequeña pero real, capaz de ponerse en movimiento, y de transmitir movimiento de una parte a otra con gran velocidad, pero no infinita.

Por lo tanto, las partes de este medio deben estar tan conectadas que el movimiento de una parte dependa de algún modo del movimiento del resto; y al mismo tiempo estas conexiones deben ser capaces de un cierto tipo de elasticidad, ya que la comunicación del movimiento no es instantánea, sino que lleva cierto tiempo.

Por lo tanto, el medio es capaz de recibir y almacenar dos tipos de energía, a saber, la energía "real", dependiente de los movimientos de sus partes y la energía "potencial", que consiste en el trabajo que hará el medio para recuperarse del desplazamiento en virtud de su elasticidad.

La propagación de ondulaciones consiste en la transformación continua de una de estas formas de energía, alternativamente en la otra, y en cualquier momento la cantidad de energía en todo el medio se divide por igual, de modo que la mitad es energía de movimiento y la mitad es resiliencia elástica.

(7) Un medio que tiene tal constitución puede ser capaz de otros tipos de movimiento y desplazamiento que aquellos que producen los fenómenos de luz y calor, y algunos de estos pueden ser de tal naturaleza que puedan ser evidenciados a nuestros sentidos por los fenómenos que producen.

(8) Ahora sabemos que el medio luminífero es, en algunos casos, utilizado por el magnetismo; ya que Faraday[*] descubrió que cuando un rayo de luz polarizada planarmente atraviesa un medio diamagnético transparente en la dirección de las líneas de fuerza magnética producidas por imanes o corrientes en la vecindad, se produce un giro en el plano de polarización.

Esta rotación es dirigida siempre en la dirección en la que se debe llevar electricidad positiva alrededor del cuerpo diamagnético para producir la magnetización real del campo.

Desde entonces, Verdet[†] ha descubierto que si un cuerpo paramagnético, como la solución de percloruro de hierro en éter, se sustituye por el cuerpo diamagnético, la rotación ocurre en la dirección opuesta.

Últimamente, el Profesor W. Thomson[‡] ha señalado que ninguna distribución de fuerzas que actúe entre las partes de un medio cuyo único movimiento es el de las vibraciones luminosas, es

[*]"On the Possible Density of the Luminiferous Medium, and on the Mechanical Value of a Cubic Mile of Sunlight," *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* (1854), p. 57.

[*]*Experimental Researches in Electricity*, Series 19.

[†]*ComptesRendus* (1856, segunda mitad del año, p. 529, y 1857, primera mitad del año, p. 1209).

suficiente para dar cuenta de los fenómenos, pero que debemos admitir la existencia de un movimiento en el medio que depende de la magnetización, además del movimiento vibratorio que constituye la luz.

Es cierto que la rotación del plano de polarización por el magnetismo ha sido observada sólo en medios de densidad considerable; pero las propiedades del campo magnético no se alteran tanto por la sustitución de un medio por otro, o por el vacío, como para permitirnos suponer que el medio denso hace algo más que simplemente modificar el movimiento del éter. Por lo tanto, tenemos motivos justificables para indagar si no puede haber un movimiento del medio etéreo dondequiera que se observen efectos magnéticos, y tenemos alguna razón para suponer que este movimiento es uno de rotación, teniendo a la dirección de la fuerza magnética como su eje.

(9) Ahora podemos considerar otro fenómeno observado en el campo electromagnético. Cuando un cuerpo se mueve a través de las líneas de fuerza magnética, experimenta lo que se llama una fuerza electromotriz; las dos extremidades del cuerpo tienden a electrificarse opuestamente, y una corriente eléctrica tiende a fluir a través del cuerpo. Cuando la fuerza electromotriz es lo suficientemente potente y está hecha para actuar sobre ciertos cuerpos compuestos, los descompone y hace que uno de sus componentes pase hacia un extremo del cuerpo y el otro en la dirección opuesta.

Aquí tenemos evidencia de una fuerza que causa una corriente eléctrica a pesar de la resistencia; electrificando las extremidades de un cuerpo con cargas opuestas, una condición que se sostiene únicamente por la acción de la fuerza electromotriz, y que, tan pronto como se elimina esa fuerza, tiende, con una fuerza igual y opuesta, a producir una contracorriente a través del cuerpo y restaurar el estado eléctrico original del cuerpo; y finalmente, si es lo suficientemente fuerte, descompone sustancias químicas y llevando a sus componentes en direcciones opuestas, mientras que su tendencia natural es combinarlas, y hacerlo con una fuerza que puede generar una fuerza electromotriz en la dirección inversa.

Entonces, esta es una fuerza que actúa sobre un cuerpo debida a su movimiento a través del campo electromagnético, o por cambios que ocurren en ese campo en sí mismo; y el efecto de la fuerza es producir una corriente y calentar el cuerpo, o descomponer el cuerpo, o, cuando no puede hacer ninguna de las dos cosas, poner el cuerpo en un estado de polarización eléctrica, un estado de coacción en el cual las extremidades opuestas están electrificadas opuestamente, y del cual el cuerpo tiende a aliviarse tan pronto como se elimina la fuerza perturbadora.

(10) De acuerdo con la teoría que propongo explicar, esta "fuerza electromotriz" es la fuerza que se pone en juego durante la comunicación del movimiento de una parte del medio a otra, y es mediante esta fuerza que el movimiento de una parte causa el movimiento en otra parte. Cuando la fuerza electromotriz actúa sobre un circuito conductor, produce una corriente que, al encontrar resistencia, ocasiona una transformación continua de energía eléctrica en calor, que es incapaz de ser restaurada nuevamente a la forma de energía eléctrica por cualquier reversión del proceso.

[‡] *Proceedings of the Royal Society*, junio de 1856 y junio de 1861.

(11) Pero cuando la fuerza electromotriz actúa sobre un dieléctrico produce un estado de polarización de sus partes, similar en distribución a la polaridad de las partes de una masa de hierro bajo la influencia de un imán, y como la polarización magnética, capaz de ser descrito como un estado en el que cada partícula tiene sus polos opuestos en condiciones opuestas[*].

En un dieléctrico bajo la acción de la fuerza electromotriz, podemos concebir que la electricidad en cada molécula está tan desplazada que un lado se representa de manera positiva y el otro eléctricamente negativo, pero que la electricidad permanece completamente conectada con la molécula, y no pasa de una molécula a otra. El efecto de esta acción en toda la masa dieléctrica es producir un desplazamiento general de la electricidad en una determinada dirección. Este desplazamiento no equivale a una corriente, porque cuando ha alcanzado un cierto valor permanece constante, sino que es el comienzo de una corriente, y sus variaciones constituyen corrientes en la dirección positiva o negativa según que el desplazamiento aumenta o decrece. En el interior del dieléctrico no hay indicios de electrificación, porque la electrificación de la superficie de cualquier molécula se neutraliza por la electrificación opuesta de las superficies de las moléculas en contacto con ella; pero en la superficie límite del dieléctrico, donde la electrificación no se neutraliza, encontramos los fenómenos que indican la electrificación positiva o negativa.

La relación entre la fuerza electromotriz y la cantidad de desplazamiento eléctrico que produce depende de la naturaleza del dieléctrico, la misma fuerza electromotriz produce generalmente un mayor desplazamiento eléctrico en dieléctricos sólidos, como vidrio o azufre, que en el aire.

(12) Aquí, entonces, percibimos otro efecto de la fuerza electromotriz, a saber, el desplazamiento eléctrico, que según nuestra teoría es una especie de elasticidad que cede a la acción de la fuerza, similar a la que tiene lugar en las estructuras y máquinas debido a la falta de rigidez perfecta de las conexiones.

(13) La investigación práctica de la capacidad inductiva de los dieléctricos se vuelve difícil a causa de dos fenómenos perturbadores. El primero es la conductividad del dieléctrico, que, aunque en muchos casos es excesivamente pequeña, no es del todo indedtectable. El segundo es el fenómeno llamado absorción eléctrica[*], en virtud del cual, cuando el dieléctrico está expuesto a la fuerza electromotriz, el desplazamiento eléctrico aumenta gradualmente, y cuando se elimina la fuerza electromotriz, el dieléctrico no vuelve instantáneamente a su estado primitivo, sino solo descarga una parte de su electrificación, y cuando se deja, solo adquiere gradualmente electrificación en su superficie, a medida que el interior se despolariza gradualmente. Casi todos los dieléctricos sólidos exhiben este fenómeno, que da lugar a la carga residual en el frasco de Leyden, y a varios fenómenos de cables eléctricos descritos por el Sr. F. Jenkin[†].

(14) Tenemos aquí otros dos tipos de rendimiento además del rendimiento del dieléctrico perfecto, que hemos comparado con un cuerpo perfectamente elástico. El rendimiento debido a la

[*]Faraday, *Exp. Res*. Series XI; Mossotti, *Mem. della Soc. Italiana* (Modena), vol. xxiv. Parte *2.* p. 49.

[*]Faraday, *Exp. Res*, 1233 -1250.

[†]*Reports of British Association*, 1859, p. 248; y *Report of Committee of Board of Trade on Submarine Cables*, pp. 136 y 464.

conductividad puede compararse con el de un fluido viscoso (es decir, un fluido que tiene una gran fricción interna), o un sólido blando en el que la fuerza más pequeña produce una alteración permanente de la figura que aumenta con el tiempo durante el cual actúa la fuerza. El rendimiento debido a la absorción eléctrica se puede comparar con el de un cuerpo elástico celular que contiene un fluido espeso en sus cavidades. Tal cuerpo, cuando se somete a presión, se comprime gradualmente en función del rendimiento gradual del fluido espeso; y cuando se elimina la presión no recupera de inmediato su figura, porque la elasticidad de la sustancia del cuerpo debe ir superando gradualmente la tenacidad del fluido antes de poder recuperar el equilibrio completo.

Varios cuerpos sólidos en los que no se puede encontrar ninguna estructura como la que hemos supuesto, parecen poseer una propiedad mecánica de este tipo[‡]; y parece probable que las mismas sustancias, si dieléctricas, pueden poseer la propiedad eléctrica análoga, y si son magnéticas, pueden tener propiedades correspondientes relacionadas con la adquisición, retención y pérdida de polaridad magnética.

(15) Por lo tanto, parece que ciertos fenómenos de la electricidad y el magnetismo conducen a la misma conclusión que los de la óptica, a saber, que hay un medio etéreo que impregna todos los cuerpos, y modificado solo en grado por su presencia; que las partes de este medio pueden ser puestas en movimiento por corrientes eléctricas e imanes; que este movimiento se comunica de una parte del medio a otra por fuerzas que surgen de las conexiones de esas partes; que bajo la acción de estas fuerzas hay un cierto rendimiento dependiendo de la elasticidad de estas conexiones; y que, por lo tanto, la energía en dos formas diferentes puede existir en el medio, siendo la única forma la energía real de movimiento de sus partes, y la otra es la energía potencial almacenada en las conexiones, en virtud de su elasticidad.

(16) Entonces, nos conducen a la concepción de un mecanismo complicado capaz de una gran variedad de movimientos, pero al mismo tiempo conectado de tal modo que el movimiento de una parte depende, de acuerdo con las relaciones definidas, del movimiento de otra partes, estos movimientos son comunicados por fuerzas que surgen del desplazamiento relativo de las partes conectadas, en virtud de su elasticidad. Tal mecanismo debe estar sujeto a las leyes generales de la Dinámica, y debemos ser capaces de resolver todas las consecuencias de su movimiento, siempre que conozcamos la forma de la relación entre los movimientos de las partes.

(17) Sabemos que cuando se establece una corriente eléctrica en un circuito conductor, la parte vecina del campo se caracteriza por ciertas propiedades magnéticas, y que si dos circuitos están en el campo, las propiedades magnéticas del campo debido a los dos las corrientes se combinan. Por lo tanto, cada parte del campo está en conexión con ambas corrientes, y las dos corrientes se ponen en conexión entre sí en virtud de su conexión con la magnetización del campo. El primer resultado de esta conexión que propongo examinar, es la inducción de una corriente por otra y el movimiento de los conductores en el campo.

[‡] Como, por ejemplo, la composición de pegamento, melaza, etc., De los cuales se hacen pequeñas figuras de plástico, que después de ser distorsionadas recuperan gradualmente su forma.

El segundo resultado, que se deduce de esto, es la acción mecánica entre los conductores que transportan corrientes. El fenómeno de la inducción de corrientes ha sido deducido de su acción mecánica por H. von Helmholtz[*] y por W. Thomson[†]. He seguido el orden inverso, y deduje la acción mecánica de las leyes de inducción. Luego describí métodos experimentales para determinar las cantidades L, M, N de las que dependen estos fenómenos.

(18) Luego apliqué los fenómenos de inducción y atracción de corrientes a la exploración del campo electromagnético y el establecimiento de sistemas de líneas de fuerza magnética que indican sus propiedades magnéticas. Al explorar el mismo campo con un imán, mostré la distribución de las superficies magnéticas equipotenciales, cortando las líneas de fuerza en ángulos rectos.

A fin de usar estos resultados dentro del poder del cálculo simbólico, voy a expresarlos en la forma de las Ecuaciones Generales del Campo Electromagnético.

Estas ecuaciones expresan:

(A) La relación entre el desplazamiento eléctrico, la conducción verdadera y la corriente total, formada por ambos.

(B) La relación entre las líneas de fuerza magnética y los coeficientes inductivos de un circuito, como ya se dedujo de las leyes de inducción.

(C) La relación entre la fuerza de una corriente y sus efectos magnéticos, de acuerdo con el sistema electromagnético de medición.

(D) El valor de la fuerza electromotriz en un cuerpo, como resultado del movimiento del cuerpo en el campo, la alteración del campo en sí, y la variación de la electricidad potencial de una parte del campo a otra.

(E) La relación entre el desplazamiento eléctrico y la fuerza electromotriz que lo produce.

(F) La relación entre una corriente eléctrica y la fuerza electromotriz que la produce.

(G) La relación entre la cantidad de electricidad libre en cualquier punto y los desplazamientos eléctricos en el vecindario.

(H) La relación entre el aumento o la disminución de la electricidad libre y las corrientes eléctricas en el vecindario. Hay veinte de estas ecuaciones en total, que implican veinte cantidades variables.

(19) Luego expresaré en términos de estas cantidades la energía intrínseca del cmpo electromagnético como dependiendo, en cada cada punto, en parte de su polarización eléctrica y en parte de su polarización magnética.

---

[*] "Conservation of Force," *Physical Society of Berlin*, 1847; y *Taylor's Scientific Memoirs*, 1853,p. 114.
[†] *Reports of the British Association*, 1848; *Philosophical Magazine*, Dic. 1851.

De esto determinaré la fuerza mecánica actuante, primero, sobre un conductor movible transportando una corriente eléctrica; 2º, sobre un polo magnético; y en tercer término, sobre un cuerpo electrificado. El último resultado, a saber, la fuerza mecánica que actúa sobre un cuerpo electrificado, dará lugar a un método independiente de medición eléctrica basado sobre sus efectos electrostáticos. La relación entre las unidades empleadas en los dos métodos resulta que depende de lo que he llamado "Elasticidad eléctrica" del medio, y parece ser una velocidad, que ha sido determinada experimentalmente por los Sres.Weber y Kohlrausch.

Luego mostraré cómo calcular la capacidad electrostática de un condensador, y la capacidad inductiva específica de un dieléctrico.

A continuación se examinará el caso de un condensador formado por capas paralelas de sustancias con diferentes resistencias eléctricas y capacidades inductivas, y se demostrará que, generalmente, se produce el fenómeno denominado *absorción eléctrica*, es decir, cuando el condensador se descarga repentinamente, al cabo de breve tiempo muestra signos de una carga residual.

20) Las ecuaciones generales se aplican seguidamente al caso de una perturbación magnética propagada a través de un campo no conductor, y se demuestra que las únicas perturbaciones que pueden propagarse son las que son transversales a la dirección de propagación, y que la velocidad de propagación es la velocidad *v*, que se encuentra en experimentos como los de Weber, que expresa el número de unidades de electricidad electrostáticas que están contenidas en una unidad electromagnética.

Esta velocidad es tan cercana a la de la luz, que parece que tenemos una fuerte razón para concluir que la luz misma (incluido el calor radiante y otras radiaciones) es una perturbación electromagnética en forma de ondas propagadas a través del campo electromagnético según las leyes electromagnéticas. Si así es, la concordancia entre la elasticidad del medio calculada a partir de las rápidas alternancias de las vibraciones luminosas y la que se encuentra en los lentos procesos de experimentos eléctricos muestra cuán perfectas y regulares deben ser las propiedades elásticas del medio cuando no están cargadas con cualquier materia más densa que el aire. Si el mismo carácter de la elasticidad se retiene en cuerpos transparentes densos, parece que el cuadrado del índice de refracción es igual al producto de la capacidad dieléctrica específica y la capacidad magnética específica. Los cuerpos conductores muestran que absorben rápidamente tales radiaciones y, en consecuencia son, generalmente, opacos.

Esta velocidad es tan cercana a la de la luz, que parece que tenemos una fuerte razón para concluir que la luz misma (incluido el calor radiante y otras radiaciones) es una perturbación electromagnética en forma de ondas propagadas a través del campo electromagnético según las leyes electromagnéticas. Si así es, la concordancia entre la elasticidad del medio calculada a partir de las rápidas alternancias de las vibraciones luminosas y la que se encuentra en los lentos procesos de experimentos eléctricos muestra cuán perfectas y regulares deben ser las propiedades elásticas del medio cuando no están interactuando con cualquier materia más densa que el aire. Si el mismo carácter de la elasticidad se retiene en cuerpos transparentes densos, parece que el cuadrado del índice de refracción es igual al producto de la capacidad dieléctrica específica y la capacidad magnética específica. Se demuestra que los medios conductores absorben dichas radiaciones rápidamente y, por lo tanto, son generalmente opacos.

La concepción de la propagación de las perturbaciones magnéticas transversales excluyendo a las longitudinales fue claramente establecida por el Profesor Faraday* en sus "Pensamientos sobre las vibraciones de los rayos". La teoría electromagnética de la luz, como él la propuso, es la misma, en sustancia, que comencé a desarrollar en este documento, excepto que en 1846 no había datos para calcular la velocidad de propagación.

(21) Las ecuaciones generales se aplican luego al cálculo de los coeficientes de inducción mutua entre dos corrientes circulares y al coeficiente de autoinducción en una bobina. Se investiga la falta de uniformidad de la corriente en las diferentes partes de la sección de un cable donde se inicia la corriente y creo que, por primera vez, se encuentra la consiguiente corrección del coeficiente de autoinducción.

Estos resultados se aplican al cálculo de la autoinducción de la bobina utilizada en los experimentos del Comité de la Asociación Británica de Normas de Resistencia Eléctrica, y el valor se compara con el deducido de los experimentos.

* Thoughts on Ray Vibrations, *Philosophical Magazine*, Mayo de 1846, o *Experimental Researches*, iii. p. 447.

PARTE II – SOBRE LA INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Momentum electromagnético de una corriente

(22) Podemos comenzar considerando el estado del campo electromagnético en las vecindades de una corriente eléctrica. Sabemos que en el campo se excitan las fuerzas magnéticas, su dirección y magnitud dependen de las leyes conocidas sobre la forma del conductor que transporta la corriente. Cuando aumenta la intensidad de la corriente, todos los efectos magnéticos aumentan en la misma proporción. Ahora, si el estado magnético del campo depende de los movimientos del medio, se debe ejercer una cierta fuerza para aumentar o disminuir estos movimientos, y cuando los movimientos se excitan, continúan, de modo que el efecto de la conexión entre la corriente y el campo electromagnético que lo rodea, es dotar a la corriente de una especie de momentum, al igual que la conexión entre el punto de conducción de una máquina y un volante dota al punto de conducción con un momentum adicional, que se puede llamar momentum del volante reducido al punto de conducción. La fuerza desequilibrada que actúa en el punto de conducción aumenta este momentum, y se mide por la proporción de su aumento.

En el caso de las corrientes eléctricas, la resistencia al aumento o disminución repentina de la intensidad produce efectos exactamente iguales a los del momentum, pero la cantidad de este momentum depende de la forma del conductor y la posición relativa de sus diferentes partes.

Acción mutua de dos corrientes

(23) Si hay dos corrientes eléctricas en el campo, la fuerza magnética en cualquier punto es la compuesta de las fuerzas debidas a cada corriente por separado, y ya que las dos corrientes están en conexión con cada punto del campo, estarán en conexión entre sí, de modo que cualquier aumento o disminución de una producirá una fuerza que actúa con la otra o contraria a la otra.

Ilustración dinámica del momentum reducido

(24) Como ilustración dinámica, supongamos que un cuerpo C está tan conectado con dos puntos de conducción independientes A y B, que su velocidad es p veces la de A y q veces la de B. Sea u la velocidad de A, v la de B, y w la de C, y sean δx, δy, δz, sus desplazamientos simultáneos, luego, por la ecuación general de la Dinámica[*]

[*] Lagrange, *Mec. Anal*. ii. 2. § 5.

$$C\frac{dw}{dt}\delta z = X\delta x + Y\delta y$$

donde *X* e *Y* son las fuerzas que actúan en *A* y en *B*.

Pero $$\frac{dw}{dt} = p\frac{du}{dt} + q\frac{dv}{dt}$$

y $$\delta z = p\delta x + q\delta y$$

Sustituyendo y recordando que δx y δy son independientes

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{d}{dt}\left(Cp^2u + Cpqv\right) \\ Y &= \frac{d}{dt}\left(Cpqu + Cq^2v\right) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Podemos llamar a $Cp^2u + Cpqv$ el momentum de *C* referido a *A* y a $Cpqu + Cq^2v$ el momentum de *C* referido a *B*; entonces podemos decir que el efecto de la fuerza *X* es incrementar el momentum de *C* referido a *A* y el de *Y* de incrementar su momentum referido a *B*. Si hay varios cuerpos conectados a *A* y *B* de manera similar pero con diferentes valores de *p* y *q*, podemos tratar la cuestión de la misma manera, suponiendo

$$L = \sum\left(Cp^2\right)\ M = \sum\left(Cpq\right)\ N = \sum\left(Cq^2\right)$$

Donde las sumatorias están extendidas a todos los cuerpos con sus valores propios de *C*, *p* y *q*. Luego, el momentum del sistema referido a *A* es:

$$Lu + Mv$$

y el referido a *B* es

$$Mu + Nv$$

Por lo que tendremos

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{d}{dt}\left(Lu + Mv\right) \\ Y &= \frac{d}{dt}\left(Mu + Nv\right) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Donde *X* e *Y* son las fuerzas externas que actúan sobre *A* y *B*.

(25) Para hacer la ilustración más completa, solo tenemos que suponer que el movimiento de *A* es resistido por una fuerza proporcional a su velocidad, que podemos llamar *Ru*, y la de *B* por una

fuerza similar, que podemos llamar *Sv*, *R* y *S* son coeficientes de resistencia. Entonces si ξ y η son las fuerzas en *A* y *B*

$$\left.\begin{aligned}\xi = X + Ru = Ru + \frac{d}{dt}\left(Lu + Mv\right)\\ \eta = Y + Sv = Sv + \frac{d}{dt}\left(Mu + Nv\right)\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Si la velocidad de *A* aumenta a la velocidad, $\frac{du}{dt}$ entonces para evitar que *B* se mueva se le debe aplicar una fuerza, $\eta \frac{d}{dt}\left(Mu\right)$

Este efecto en *B*, debido a un aumento de la velocidad de *A*, corresponde a la fuerza electromotriz en un circuito que surge de un aumento en la fuerza de un circuito vecino.

Esta ilustración dinámica se debe considerar meramente como una ayuda al lector a comprender lo que significa "Reducción del momentum" en Mecánica. Los hechos de la inducción de corrientes como dependientes de las variaciones de la cantidad llamada Momentum electromagnético, o Estado electrotónico, se basan en los experimentos de Faraday[*], Felici[†], etc.

Coeficientes de inducción para dos circuitos.

(26) En el campo electromagnético, los valores de *L*, *M*, *N* dependen de la distribución de los efectos magnéticos debido a los dos circuitos, y esta distribución depende únicamente de la forma y posición relativa de los circuitos. Por lo tanto, *L, M, N* son cantidades que dependen de la forma y la posición relativa de los circuitos, y están sujetas a variaciones con el movimiento de los conductores. Se verá en el presente que *L, M, N* son cantidades geométricas de la naturaleza de las líneas, es decir, de una sola dimensión en el espacio; *L* depende de la forma del primer conductor, que llamaremos *A*, *N* por la forma del segundo, que llamaremos *B*, y *M* por la posición relativa de *A* y *B*.

(27) Sea ξ la fuerza electromotriz que actúa sobre *A*, *x* la fuerza de la corriente, y *R* la resistencia, entonces *Rx* será la fuerza de resistencia. En corrientes estacionarias, la fuerza electromotriz equilibra sólo la fuerza resistente, pero en corrientes variables la fuerza resultante $\xi = Rx$ se emplea en aumentar el "momentum electromagnético", usando la palabra momentum, simplemente, para expresar lo que se genera por una fuerza que actúa durante un tiempo, es decir, una velocidad que existe en un cuerpo.

[*] *Experimental Researches*, Series I., IX .

[†] *Annales de Chimie*, ser. 3. xxxiv. (1852) p. 64.

En el caso de las corrientes eléctricas, la fuerza en acción no es una fuerza mecánica ordinaria, al menos todavía no podemos medirla como fuerza común, pero la llamamos fuerza electromotriz, y el cuerpo movido no es simplemente la electricidad en el conductor, sino algo fuera del conductor, y capaz de ser afectado por otros conductores en sus vecindades llevando corrientes. En esto se parece más al impulso reducido de un punto de conducción de una máquina influenciado por sus conexiones mecánicas, que el de un simple cuerpo en movimiento como una bala de cañón o agua moviéndose en un tubo.

Relaciones electromagnéticas entre dos circuitos conductores

(28.) En el caso de dos circuitos conductores, *A* y *B*, supondremos que el momentum electromagnético correspondiente a *A* es

$$\boldsymbol{Lx + My}$$

Y el correspondiente a *B*

$$\boldsymbol{Mx + Ny}$$

donde *L, M, N* corresponden a las mismas cantidades en la ilustración dinámica, excepto que se supone que son capaces de variar cuando se mueven los conductores *A* o *B*.

Entonces, la ecuación de la corriente en *x* en A será

$$\xi = Rx + \frac{d}{dt}(Lx + My) \tag{4}$$

Y la de *y* en *B*

$$\eta = Sy + \frac{d}{dt}(Mx + Ny) \tag{5}$$

Donde ξ y η son las fuerzas electromotrices, *x* e *y* las corrientes y *R* y S las resistencias en *A* y *B*, respectivamente.

Inducción de una corriente por otra

(29) Caso 1: Cuando no hay fuerza electromotriz en *B*, excepto la que surge de la acción de *A*, y permite que la corriente de *A* aumente desde 0 hasta el valor *x*,

$$Sy + \frac{d}{dt}(Mx + Ny) = 0 \tag{6}$$

De donde

$$Y = \int_0^t y\,dt = -\frac{M}{S}x \qquad (7)$$

Es decir, una cantidad de electricidad *Y*, que es la corriente inducida total, fluirá a través de *B* cuando *x* se eleva de 0 a *x*. Esto es la inducción por variación de la corriente en el conductor primario. Cuando *M* es positivo, la corriente inducida debido al aumento de la corriente primaria es negativa.

Inducción por el movimiento del conductor

(30) Caso 2: Cuando *x* permanece constante, y *M* cambia a *M'*:

$$Y = -\frac{M'-M}{S}x$$

de modo que si se aumenta *M*, que será cuando los circuitos primario y secundario se acercan entre sí, habrá una corriente inducida negativa; siendo *Y* la cantidad total de electricidad atravesada por B. Esta es una inducción por el movimiento relativo de los conductores primario y secundario.

Ecuación del trabajo y la energía

Para encontrar la relación entre el trabajo realizado y la energía producida, se multiplica la (1) por *x* y la (2) por *y* y se suman

$$\xi x + \eta y = Rx^2 + Sy^2 + x\frac{d}{dt}(Lx + My) + y\frac{d}{dt}(Mx + Ny) \qquad (8)$$

Aquí ξx es el trabajo hecho por unidad de tiempo por la fuerza electromotriz ξ actuando sobre la corriente *x* y manteniéndola, y ηy es el trabajo hecho por la fuerza electromotriz η. Por lo tanto, el lado izquierdo de la ecuación representa el trabajo realizado por las fuerzas electromotrices por unidad de tiempo.

Calor producido por la corriente

(32) Del otro lado de la ecuación tenemos, primero

$$Rx^2 + Sy^2 = H \qquad (9)$$

que representa el trabajo realizado para superar la resistencia de los circuitos en la unidad de tiempo. Esto se convierte en calor. Los términos restantes representan trabajo no convertido en calor. Pueden escribirse

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(Lx^2+2Mxy+Ny^2\right)+\frac{1}{2}\frac{dL}{dt}x^2+\frac{dM}{dt}xy+\frac{1}{2}\frac{dN}{dt}y^2$$

Energía intrínseca de las corrientes

(33) Si *L, M, N* son constantes, todo el trabajo de las fuerzas electromotrices que no es gastado contra la resistencia se empleará al desarrollo de las corrientes. Por lo tanto, toda la energía intrínseca de las corrientes es

$$\frac{1}{2}Lx^2+Mxy+\frac{1}{2}Ny^2=E \qquad (10)$$

Esta energía existe en una forma imperceptible para nuestros sentidos, probablemente como movimiento real, el lugar de este movimiento no es simplemente los circuitos conductores, sino el espacio que los rodea.

Acción mecánica entre conductores

(34) Los términos remanentes

$$\frac{1}{2}\frac{dL}{dt}x^2+\frac{dM}{dt}xy+\frac{1}{2}\frac{dN}{dt}y^2=W \qquad (11)$$

representan el trabajo realizado en la unidad de tiempo derivado de las variaciones de *L, M* y *N*, o lo que es lo mismo, las alteraciones en la forma y posición de los circuitos conductores *A* y *B*.

Ahora bien, si se realiza el trabajo cuando se mueve un cuerpo, debe surgir de una fuerza mecánica ordinaria que actúa sobre el cuerpo mientras se mueve. Por lo tanto, esta parte de la expresión muestra que hay una fuerza mecánica que impulsa cada parte de los conductores en aquella dirección en la que los valores de *L, M* y *N* sean los más incrementados.

La existencia de la fuerza electromagnética entre los conductores que transportan corrientes es, por lo tanto, una consecuencia directa de la acción conjunta e independiente de cada corriente en el campo electromagnético. Si *A* y *B* pueden acercarse a una distancia *ds* para aumentar *M* desde *M* a M’ mientras que las corrientes son *x* e *y*, entonces el trabajo realizado es

$$\left(M'-M\right)xy$$

y la fuerza en la dirección de *ds* será

$$\frac{dM}{ds}xy \tag{12}$$

y esto será una atracción si *x* e *y* son del mismo signo, y si *M* aumenta a medida que *A* y *B* se aproximan.

Por lo tanto, parece que si admitimos que la parte no resistida de la fuerza electromotriz, mientras actúa, continúa generando un estado auto-persistente de la corriente, que podemos llamar (por analogía mecánica) su momentum electromagnético, y que este momentum depende de las circunstancias externas al conductor, entonces tanto la inducción de las corrientes y las atracciones electromagnéticas pueden ser probadas por razonamientos mecánicos.

Lo que he llamado momentum electromagnético es la misma cantidad que lo que fue llamado por Faraday[*], el estado electrotónico del circuito; todo cambio que involucre la acción de una fuerza electromotriz, como el cambio del momentum, involucra la acción de una fuerza mecánica.

Por lo tanto, si los fenómenos descritos por Faraday en la Novena Serie de sus *Experimental Researches*, fueran los únicos hechos conocidos sobre las corrientes eléctricas, las leyes de Ampère relacionadas con la atracción de conductores que trasportan corrientes, así como las de Faraday sobre la inducción mutua de corrientes, podrían deducirse mediante razonamientos mecánicos.

Para llevar estos resultados dentro del rango de verificación experimental, tendré que investigar el caso de una sola corriente, de dos corrientes, y de seis corrientes en el equilibrio eléctrico, para permitir al experimentador determinar los valores de *L, M, N*.

Caso de un único circuito

(35) La ecuación de a corriente *x* en un circuito cuya resistencia es *R* y cuyo coeficiente de autoinducción es *L*, actuando por una fuerza electromotriz externa ξ, es

$$\xi - Rx = \frac{d}{dt}Lx \tag{13}$$

Cuando ξ es constante, la solución toma la forma de

$$x = b + (a - b)e^{-\frac{R}{L}t}$$

donde *a* es el valor de la corriente al comienzo y *b* es su valor final.

[*] *Experimental Researches*, Series I, 60, etc.

La cantidad total de electricidad que pasa en un tiempo *t*, donde *t*, tiene un valor grande, es

$$\int_0^t x\,dt = bt + (a-b)\frac{L}{R} \qquad (14)$$

El valor de la integral de x^2 con respecto al tiempo es

$$\int_0^t x^2 dt = b^2 t + (a-b)\frac{L}{R}\left(\frac{3b+a}{2}\right) \qquad (15)$$

La corriente real cambia gradualmente del valor inicial *a* al valor final *b*, pero los valores de las integrales de *x* y x^2 son los mismos que si fluyera una corriente constante de intensidad $^1/_2$ $(a + b)$ durante un tiempo 2 L/R y luego fuera sucedida por la corriente estable *b*. El tiempo 2 L/R es, generalmente, tan minúsculo como una fracción de segundo, que los efectos sobre el galvanómetro y el dinamómetro pueden calcularse como si el impulso fuera instantáneo.

Si el circuito consta de una batería y una bobina, cuando el circuito se completa por primera vez, los efectos son los mismos que si la corriente tuviera sólo la mitad de su potencia final durante el tiempo $2L/R$. Esta disminución de la corriente, debido a la inducción, a veces se denomina contracorriente.

(36) Si se lanza repentinamente una resistencia adicional *r* al circuito que al romper el contacto, fuerza a la corriente a pasar a través de un cable delgado de resistencia *r*, entonces la corriente original que era $a = \xi / R$ da lugar a la corriente final $b = \xi / (R + r)$.

Entonces, la corriente de inducción es $\frac{1}{2}\xi\frac{2R+r}{R(R+r)}$ y continúa durante un tiempo $2L/(R + r)$. Esta corriente es mayor que la que la batería puede mantener para los dos cables *R* y *r* y puede ser suficiente para provocar la ignición del cable delgado *r*.

Cuando el contacto se rompe separando los cables en el aire, esta resistencia adicional viene dada por el aire interpuesto, y dado que la fuerza electromotriz a través de la nueva resistencia es muy grande, se forzará la producción de una chispa.

Si la fuerza electromotriz es de la forma *E sen pt*, como en el caso de una bobina que gira en un campo magnético, entonces

$$x = \frac{E}{\rho}\sin(pt-\alpha),$$

donde $\rho^2 = R^2 + L^2p^2$ y $\mathrm{tg}\alpha = Lp/R$

Caso de dos circuitos

(37) Sea *R* el circuito primario y sea *S* el circuito secundario, entonces tenemos un caso similar al de la bobina de inducción.

Las ecuaciones de las corrientes son aquellas marcadas con *A* y *B*, y aquí podemos suponer que *L*, *M*, *N* son constantes porque no hay movimiento de los conductores. Las ecuaciones se vuelven

$$\left.\begin{aligned} Rx + L\frac{dx}{dt} + M\frac{dy}{dt} = \xi \\ Sy + M\frac{dx}{dt} + N\frac{dy}{dt} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (13^*)$$

Para encontrar la cantidad total de electricidad que pasa, solo tenemos que integrar estas ecuaciones con respecto a *t*; entonces si x_0, y_0 son las intensidades de la corriente en el tiempo 0, y x_1, y_1 en el tiempo *t*, y si *X*, *Y* son las cantidades de electricidad pasadas a través de cada circuito durante el tiempo *t*,

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{1}{R}\{\xi t + L(x_{0.} - x_1) + M(y_0 - y_1)\} \\ Y &= \frac{1}{S}\{M(x_{0.} - x_1) + N(y_0 - y_1)\} \end{aligned}\right\} \qquad (14^*)$$

Cuando se completa el circuito R, y *t* es grande, las corrientes totales hasta el tiempo t, se encuentran al hacer

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \xi/R, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 0, \qquad (15^*)$$

$$X = x_1\left(t - \frac{L}{R}\right), \quad Y = -\frac{M}{S}x_1$$

Por lo tanto, el valor de la contracorriente total en *R* es independiente del circuito secundario y la corriente de inducción en el circuito secundario depende sólo de *M*, el coeficiente de inducción entre las bobinas, de *S*, la resistencia de la bobina secundaria, y de x_1, la fuerza final de la corriente en *R*.

Cuando la fuerza electromotriz ξ deja de actuar, hay una corriente extra en el circuito primario y una corriente inducida positiva en el circuito secundario, cuyos valores son iguales y opuestos a los producidos al hacer contacto.

(38) Todas las cuestiones relacionadas con la cantidad total de corrientes transitorias, medidas por el impulso dado al imán del galvanómetro, pueden resolverse de esta manera sin la necesidad de una solución completa de las ecuaciones. El efecto de calentamiento de la corriente y el impulso que le da a la bobina suspendida del dinamómetro de Weber dependen del cuadrado de la corriente en cada instante durante el corto tiempo que dura. Por lo tanto, debemos obtener la solución de las ecuaciones, y de la solución podemos encontrar los efectos tanto sobre el galvanómetro como sobre

el dinamómetro; y luego podemos hacer uso del método de Weber para estimar la intensidad y la duración de una corriente uniforme mientras dura, lo que produciría los mismos efectos.

(39) Sean n_1, n_2, las raíces de la ecuación

$$(LN - M^2)n^2 + (RN + LS)n + RS = 0 \tag{16}$$

y supongamos que la bobina primaria actúa con una fuerza electromotriz constante Rc, de modo que c sea la corriente constante que podría mantener; entonces, la solución completa de las ecuaciones para hacer contacto es

$$x = \frac{c}{S}\frac{n_1 n_2}{n_1 - n_2}\left\{\left(\frac{S}{n_1} + N\right)e^{n_1 t} - \left(\frac{S}{n_2} + N\right)e^{n_2 t} + S\frac{n_1 - n_2}{n_1 n_2}\right\} \tag{17}$$

$$y = \frac{cM}{S}\frac{n_1 n_2}{n_1 - n_2}\left(e^{n_1 t} - e^{n_2 t}\right) \tag{18}$$

A partir de las cuales podemos calcular el impulso sobre el dinamómetro

$$\int x^2 dt = c^2\left\{t - \frac{3}{2}\frac{L}{R} - \frac{1}{2}\frac{M^2}{RN + LS}\right\} \tag{19}$$

$$\int y^2 dt = c^2\frac{1}{2}\frac{M^2 R}{S(RN + LS)} \tag{20}$$

Los efectos de la corriente en la bobina secundaria sobre el galvanómetro y el dinamómetro son los mismos que los de una corriente uniforme

$$-\frac{1}{2}c\frac{MR}{RN + LS}$$

en un tiempo
$$2\left(\frac{L}{R} + \frac{N}{S}\right)$$

(40) La ecuación entre trabajo y la energía puede verificarse fácilmente. El trabajo hecho por la fuerza electromotriz es

$$\xi\int x^2 dt = c^2(Rt - L)$$

El trabajo realizado para superar la resistencia y producir calor

$$R\int x^2 dt + S\int y^2 dt = c^2\left(Rt - \frac{3}{2}L\right)$$

$$= \frac{1}{2} c^2 L$$

(41) Si el circuito *R* se interrumpe repentina y completamente mientras transporta una corriente *c*, entonces la ecuación de la corriente en la bobina secundaria sería

$$y = c \frac{M}{N} e^{-\frac{S}{N}t}$$

Esta corriente comienza con un valor $c\frac{M}{N}$ y desaparece gradualmente.

La cantidad total de electricidad es $c\frac{M}{S}$ y el valor de $\int y^2 dt$ es $= c^2 \frac{M^2}{2SN}$

Los efectos sobre el galvanómetro y el dinamómetro son iguales al que produce una corriente uniforme $\frac{1}{2} c \frac{M}{N}$ durante un tiempo $\frac{2N}{S}$

Por lo tanto, el efecto de calentamiento es mayor que el de la corriente al hacer contacto.

(42) Si una fuerza electromotriz descrita por $\xi = E \cos pt$ actúa sobre el circuito *R*, entonces, si se remueve el circuito *S*, el valor de *x* será:

$$x = \frac{E}{A} sen\left(pt - \alpha\right)$$

$$A^2 = R^2 + L^2 p^2$$

$$tan\,\alpha = \frac{Lp}{R}$$

El efecto de la presencia del circuito *S* en las vecindades es alterar los valores de *A* y α, a lo que serían si R se volviera

$$R + p^2 \frac{MS}{S^2 + p^2 N^2}$$

y *L* se volviera $$L - p^2 \frac{MN}{S^2 + p^2 N^2}$$

Por lo tanto, el efecto de la presencia del circuito *S* es aumentar la resistencia aparente y disminuir la aparente autoinducción del circuito *R*.

Sobre la Determinación de Coeficientes de Inducción por el Equilibrio Eléctrico

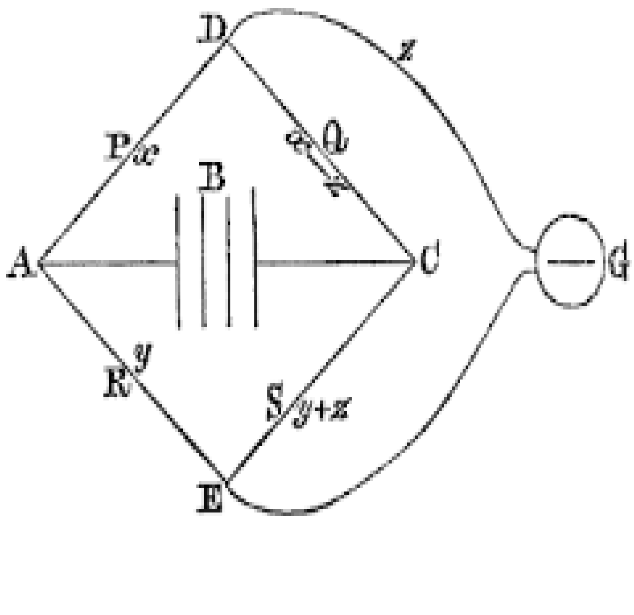
(43) La determinación del balance eléctrico se hace mediante seis conductores que unen cuatro puntos, *A, C, D, E,* dos y dos. Un par, *AC,* de estos puntos está conectado a través de la batería *B*. El par opuesto, *DE,* está conectado a través del galvanómetro *G*. Entonces, si las resistencias de los cuatro conductores restantes están representadas por *P, Q, R, S* y las corrientes en ellas por *x, x–z* e *y + z,* la corriente a través de *G* será *z*. Sean *A, C, D, E* los potenciales en los cuatro puntos. Entonces las condiciones de las corrientes constantes se pueden encontrar a partir de las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{ll} Px = A - D & Q(x-z) = D - C \\ Ry = A - E & S(y+z) = E - C \\ Gz = D - E & B(x+y) = A + C + F \end{array}\right\} \qquad (21)$$

Resolviendo estas ecuaciones, se encuentra para *z*

$$z\left\{\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}+\frac{1}{R}+\frac{1}{S}+B\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{R}\right)\left(\frac{1}{Q}+\frac{1}{S}\right)+G\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}\right)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{S}\right)+\frac{BG}{PQRS}(P+Q+R+S)\right\}=F\left(\frac{1}{PS}-\frac{1}{QR}\right) \qquad (22)$$

En esta expresión F es la fuerza electromotriz de la batería, z la corriente a través del galvanómetro cuando se ha vuelto estacionario. *P, Q, R, S* las resistencias en las cuatro ramas. *B* la de la batería y los electrodos, y *G* la del galvanómetro.



(44) Si *PS* = *QR*, entonces *z* = 0, y no habrá corriente constante, pero debido a la inducción, a través del galvanómetro, se puede producir una corriente al iniciar o interrumpir el circuito, y las indicaciones del galvanómetro pueden usarse para determinar los coeficientes de inducción, siempre que entendamos las acciones que tienen lugar.

Supondremos que *PS* = *QR*, de modo que la corriente *z* se anula cuando se deja transcurrir suficiente tiempo y

$$x(P+Q)=y(R+S)=\frac{F(P+Q)(R+S)}{(P+Q)(R+S)+B(P+Q)(R+S)}$$

Sean los coeficientes de inducción entre *P, Q, R, S,* los dados por la siguiente tabla;

	P	***Q***	***R***	***S***
P	***p***	***h***	***k***	***l***
Q	***h***	***q***	***m***	***n***
R	***k***	***m***	***r***	***o***
S	***l***	***n***	***o***	***s***

En la que *p* es el coeficiente de inducción de *P* sobre sí mismo, entre *P* y *Q*, es *h*, y así sucesivamente.

Sea *g* el coeficiente de inducción del galvanómetro sobre sí mismo y supongamos que está fuera del alcance de la influencia inductiva de *P*, *Q*, *R*, *S* (como debe ser para evitar la acción directa de *P, Q, R, S* sobre la aguja). Sean *X, Y, Z* las integrales de *x*, *y*, *z* con respecto a *t*. Al hacer contacto *x*, *y*, *z* son cero. Después de un tiempo, *z* desaparece y *x* e *y* alcanzan valores constantes. Las ecuaciones para cada conductor serán entonces

$$\left\{\begin{array}{l} PX + (p+h)x+(k+l)y=\int Adt-\int Ddt \\ Q(X-Z)+(h+q)x+(m+n)y=\int Ddt-\int Cdt \\ RY + (k+m)x+(r+o)y=\int Adt-\int Edt \\ S(Y+Z)+(l+n)x+(o+s)y=\int Edt-\int Cdt \\ GZ=\int Ddt-\int Edt \end{array}\right\} \qquad (24)$$

Resolviendo estas ecuaciones para ***Z*** se encuentra

$$\left.\begin{array}{l} Z\left\{\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}+\frac{1}{R}+\frac{1}{S}+B\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{R}\right)\left(\frac{1}{Q}+\frac{1}{S}\right)+G\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}\right)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{S}\right)+\frac{BG}{PQRS}(P+Q+R+S)\right\} \\ =-F\frac{1}{PS}\left\{\frac{p}{P}-\frac{q}{Q}-\frac{r}{R}+\frac{s}{S}+h\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{Q}\right)+k\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{Q}\right)+l\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{Q}\right)-m\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{S}\right)\right\}+n\left(\frac{1}{Q}-\frac{1}{S}\right)+o\left(\frac{1}{S}-\frac{1}{R}\right) \end{array}\right\}(25)$$

(45) Sea α la deflexión del galvanómetro por una corriente instantánea cuya intensidad es Z.

*Sea θ la deflexión permanente producida por llevar la relación entre *PR* y *QR* de 1 a ρ.

También sea *T* el tiempo de vibración de la aguja del galvanómetro entre dos detenciones consecutivas.

Entonces llamando a la cantidad

$$\left\{\frac{p}{P}-\frac{q}{Q}-\frac{r}{R}+\frac{s}{S}+h\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{Q}\right)+k\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{Q}\right)+l\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{Q}\right)-m\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{S}\right)\right\}+n\left(\frac{1}{Q}-\frac{1}{S}\right)+o\left(\frac{1}{S}-\frac{1}{R}\right)=\tau \qquad (26)$$

encontramos

$$\frac{Z}{z}=\frac{2\,sin\frac{1}{2}\alpha}{tan\,\theta}\frac{T}{\pi}=\frac{\tau}{1-\rho} \qquad (27)$$

Al determinar τ por experimento, es mejor hacer la alteración de la resistencia en uno de los brazos mediante el arreglo descrito por el Sr. Jenkin en el Informe de la Asociación Británica de 1863, mediante el cual se puede medir con precisión cualquier valor de ρ de 1 a 1,01.

Observamos (α) la mayor desviación debido al impulso de inducción cuando el galvanómetro está en circuito, cuando se realizan las conexiones, y cuando las resistencias están ajustadas para no dar una corriente permanente.

Luego observamos (β) la mayor desviación producida por la corriente permanente cuando la resistencia de uno de los brazos aumenta en la proporción de 1 a ρ, el galvanómetro no está en circuito hasta poco después de que la conexión se realiza con la batería.

Para eliminar los efectos de la resistencia del aire, lo mejor es variar ρ hasta casi β = 2α; entonces

$$\tau=T\,\frac{1}{\pi}(1-\zeta)\frac{2\,sin\frac{1}{2}\alpha}{tan\frac{1}{2}\beta} \qquad (28)$$

Si todas las ramas del equilibrio excepto *P* están formadas por bobinas de resistencia de alambre muy fino de poca longitud y duplicados antes de ser enrollados, los coeficientes de inducción que corresponden a estas bobinas serán insensibles, y τ se reducirá a *p*/*P*. Por lo tanto, el equilibrio

* [En estas circunstancias, los valores de *x* e *y* encontrados en la (44) requieren una modificación antes de ser insertados en la ecuación (24). Esto ha sido puntualizado por Lord Rayleigh, quien empleó el método descrito en el texto en su segunda determinación de la unidad británica de resistencia en medida absoluta. Ver *Philosophical Transactions*, 1882, Parte II, pp. 677, 678]

eléctrico proporciona los medios para medir la autoinducción de cualquier circuito cuya resistencia se conozca.

(46) También se puede usar para determinar el coeficiente de inducción entre dos circuitos, como por ejemplo, que entre P y S que hemos llamado m; pero sería más conveniente medir esto midiendo directamente la corriente, como en (37), sin usar el de equilibrio. También podemos determinar la igualdad de p/P y q/Q al no haber una corriente de inducción, y así, cuando conocemos el valor de p, podemos determinar el de q por un método más perfecto que la comparación de deflexiones.

Exploración del campo electromagnético.

(47) Supongamos ahora que el circuito primario A es de forma invariable, y exploremos el campo electromagnético por medio del circuito secundario B, que supondremos que es variable en forma y posición.

Podemos comenzar por suponer que B consiste en un conductor recto corto, con sus extremidades deslizándose sobre dos carriles conductores paralelos, que se ponen en conexión a cierta distancia de la pieza deslizante.

Entonces, si se desliza el conductor movible en una dirección dada, aumenta el valor de M, y una fuerza electromotriz negativa actuará en el circuito B, tendiendo a producir una corriente negativa en B durante el movimiento de la pieza deslizante.

Si se mantiene una corriente en el circuito B, entonces la pieza deslizante tenderá a moverse en esa dirección, lo que hace que M aumente. En cada punto del campo siempre habrá una cierta dirección en la cual que un conductor movido en esa dirección no experimente ninguna fuerza electromotriz en cualquier dirección en que se giren sus extremidades. Un conductor que transporta corriente no experimentará ninguna fuerza mecánica que lo impulse en esa dirección o hacia la contraria.

Esta dirección se llama la dirección de la línea de fuerza magnética a través de ese punto.

El movimiento de un conductor a través de dicha línea produce fuerza electromotriz en una dirección perpendicular a la línea y a la dirección del movimiento, y un conductor que transporta una corriente es impulsado en una dirección perpendicular a la línea y a la dirección de la corriente.

(48) Podemos suponer que B consiste en un circuito plano muy pequeño capaz de ser colocado en cualquier posición y que se puede hacer girar su plano en cualquier dirección. El valor de M será el mayor cuando el plano del circuito sea perpendicular a la línea de fuerza magnética. Por lo tanto, si se mantiene una corriente en B, tenderá a establecerse en esta posición y, por sí misma, indicará, como un imán, la dirección de la fuerza magnética.

Sobre las líneas de fuerza magnéticas

(49) Suponga cualquier superficie que dibuje, cortando las líneas de fuerza magnética, y que en esta superficie se permita que cualquier sistema de líneas se dibuje a intervalos pequeños, de modo que se ubiquen una al lado de la otra sin cortarse entre sí. Luego, dibuje cualquier línea en la superficie cortando todas estas líneas y permita que una segunda línea se dibuje cerca de ella, su distancia desde la primera sea tal que el valor de M para cada uno de los pequeños espacios encerrados entre estas dos líneas y las líneas del primer sistema sea igual a la unidad.

De la misma manera, se dibujarán más líneas para formar un segundo sistema, de modo que el valor de M para cada retículo formado por la intersección de los dos sistemas de líneas sea la unidad.

Finalmente, desde cada punto de intersección de estos retículos, trace una línea a través del campo, siempre coincidiendo en su dirección con la dirección de la fuerza magnética.

(50) De esta manera, todo el campo se llenará con líneas de fuerza magnética en forma de intervalos regulares, y las propiedades del campo electromagnético se expresarán completamente por ellos.

1º Si se dibuja cualquier curva cerrada en el campo, el valor de M para esa curva se expresará por el número de líneas de fuerza que *atraviesan* esa curva cerrada.

2º. Si esta curva es un circuito conductor y se mueve a través del campo, una fuerza electromotriz actuará en él, representada por la tasa de disminución del número de líneas que pasan a través de la curva.

3º. Si se mantiene una corriente en el circuito, el conductor actuará sobre las fuerzas que tienden a moverlo para aumentar el número de líneas que pasan a través de él, y la cantidad de trabajo realizado por estas fuerzas será igual a la corriente en el circuito multiplicada por el número de líneas adicionales.

4to. Si en el campo se coloca un pequeño circuito plano que puede girar libremente, colocará su plano perpendicular a las líneas de fuerza. Un pequeño imán se moverá espontáneamente hasta colocarse con su eje en la dirección de las líneas de fuerza.

5to. Si en el campo se coloca una barra larga y uniformemente magnetizada, cada polo será activado por una fuerza en la dirección de las líneas de fuerza. El número de líneas de fuerza que pasan por la unidad de área es igual a la fuerza que actúa sobre un polo unitario multiplicada por un coeficiente que depende de la naturaleza magnética del medio, y se denomina coeficiente de inducción magnética.

En fluidos y sólidos isótropos, el valor de este coeficiente μ es el mismo en cualquier dirección en que las líneas de fuerza pasen a través de la sustancia, pero en sólidos cristalizados, tensionados y organizados, el valor de μ puede depender de la dirección de las líneas de fuerza con respecto a los ejes de cristalización, tensión o crecimiento.

En todos los cuerpos, μ se ve afectado por la temperatura, y en el hierro parece disminuir a medida que la intensidad de la magnetización aumenta.

Sobre superficies magnéticas equipotenciales

(51) Si exploramos el campo con una barra uniformemente magnetizada, siempre que uno de sus polos se encuentre en una parte muy débil del campo magnético, entonces las fuerzas efectuarán trabajo sobre el otro polo mientras la barra se mueve por el campo.

Si comenzamos desde un punto dado y trasladamos este polo desde él a cualquier otro punto, el trabajo realizado será independiente de la trayectoria del polo entre los dos puntos; siempre que no pase corriente eléctrica entre las diferentes trayectorias que recorre el polo.

Por lo tanto, cuando en el campo no hay corrientes eléctricas sino solo imanes, podemos dibujar una serie de superficies de manera que el trabajo hecho al pasar de una a otra sea constante sea cual sea el camino que se siga entre ellas. Tales superficies se llaman Superficies equipotenciales, y en casos ordinarios son perpendiculares a las Líneas de fuerza magnética.

Si estas superficies están dibujadas de manera tal que, cuando un polo unidad pasa ordenadamente de una a otra, se realiza una unidad de trabajo, entonces el trabajo realizado en cualquier movimiento de un polo magnético será medido por la fuerza del polo multiplicado por el número de superficies que ha atravesado en la dirección positiva.

(52) Si hay circuitos que llevan corrientes eléctricas en el campo, entonces todavía habrá superficies equipotenciales en las partes del campo externas a los conductores que transportan las corrientes, pero el trabajo realizado en un polo unidad al pasar de uno a otro dependerá de la cantidad de veces que el camino del polo circula alrededor de cualquiera de estas corrientes. Por lo tanto, el potencial en cada superficie tendrá una serie de valores en la progresión aritmética, que se diferencian por el trabajo realizado al pasar completamente alrededor de una de las corrientes en el campo.

Las superficies equipotenciales no serán superficies cerradas continuas, sino que algunas de ellas tendrán extensiones limitadas, terminando en el circuito eléctrico como su borde o límite común. El número de estos será igual a la cantidad de trabajo realizado en un polo unidad al recorrer la corriente, y esto mediante la medición ordinaria = $4\pi\gamma$, donde γ es el valor de la corriente.

Por lo tanto, estas superficies están conectadas con la corriente eléctrica como las burbujas de jabón están conectadas con un anillo en los experimentos del Sr.Plateau. Cada corriente γ tiene $4\pi\gamma$ superficies unidas a ella. Estas superficies tienen a la corriente como su borde común y se encuentran con ella en ángulos iguales. La forma de las superficies en otras partes depende de la presencia de otras corrientes e imanes, así como de la forma del circuito al que pertenecen.

PARTE III. ECUACIONES GENERALES DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

(53) Supongamos que tres direcciones rectangulares en el espacio sean los ejes *x, y, z,* y dejemos que todas las cantidades que tengan cierta dirección sean expresadas por sus componentes en estas tres direcciones.

Corrientes eléctricas (*p, q, r*)

(54) Una corriente eléctrica consiste en la transmisión de electricidad de una parte de un cuerpo a otro. Sea *p* la cantidad de electricidad transmitida en una unidad de tiempo a través de la unidad de área perpendicular al eje de *x,* entonces *p* es el componente de la corriente en ese lugar en la dirección de *x.*

Usaremos las letras *p, q, r* para denotar las componentes de la corriente por unidad de área en las direcciones de *x, y, z.*

Desplazamientos eléctricos (*f, g, h*)

(55) El desplazamiento eléctrico consiste en la electrificación opuesta de los lados de una molécula o partícula de un cuerpo que puede o no estar acompañada de transmisión a través del cuerpo. Suponga que la cantidad de electricidad que aparecería en las caras *dy, dz* de un elemento *dx, dy, dz* cortado del cuerpo sea *f· dy·dz,* entonces *f* es el componente del desplazamiento eléctrico paralelo a *x*. Usaremos *f, g, h* para denotar los desplazamientos eléctricos paralelos a *x, y, z* respectivamente.

Las variaciones del desplazamiento eléctrico deben agregarse a las corrientes *p, q, r* para obtener el movimiento total de la electricidad, que podemos llamar *p', q'. r',* para que

$$\left.\begin{aligned} p' &= p + \frac{df}{dt} \\ q' &= q + \frac{dg}{dt} \\ r' &= r + \frac{dh}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

Fuerza electromotriz (*P, Q, R*)

(56) Supongamos que *P, Q, R* representan a los componentes de la fuerza electromotriz en cualquier punto. Entonces *P* representa la diferencia de potencial por unidad de longitud en un

conductor colocado en la dirección *x* en el punto dado. Podemos suponer un alambre indefinidamente corto colocado paralelo a *x* en un punto dado y tocado, por la acción de la fuerza por dos pequeños conductores, que luego son aislados y removidos de la influencia de la fuerza electromotriz. El valor de *P* podría determinarse midiendo la carga de los conductores.

Por lo tanto, si *l* es la longitud del cable, la diferencia de potencial entre sus extremos será *Pl*, y si *C* es la capacidad de cada uno de los conductores pequeños, la carga en cada uno será $^1/_2CPl$. Dado que las capacidades de los conductores moderadamente grandes, medidas en el sistema electromagnético, son excesivamente pequeñas, las fuerzas electromotrices ordinarias que surgen de las acciones electromagnéticas difícilmente podrían medirse de esta manera. En la práctica, tales mediciones se realizan siempre con conductores largos que forman circuitos cerrados o casi cerrados.

Momentum electromagnético (*F, G, H*)

(57) Sea que *F, G, H* representen los componentes del momentum electromagnético en cualquier punto del campo, debido a cualquier sistema de imanes o corrientes. Entonces *F* es el impulso total de la fuerza electromotriz en la dirección de *x* que será generado al eliminar del campo esos imanes o corrientes, es decir, si *P* fuera la fuerza electromotriz en cualquier instante durante la remoción del sistema.

$$F = \int P dt$$

De ahí que la parte de la fuerza electromotriz que depende del movimiento de los imanes o las corrientes en el campo, o de la alteración de su intensidad, es

$$P = -\frac{dF}{dt}, \quad Q = -\frac{dG}{dt}, \quad R = -\frac{dH}{dt}, \tag{29}$$

Momentum electromagnético de un circuito

(58) Sea *s* la longitud del circuito, si integramos

$$\int \left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds} \right) ds \tag{30}$$

alrededor del circuito, obtendremos el momentum electromagnético total del circuito, o el número de líneas de fuerza magnética que pasan a través de él, cuyas variaciones miden la fuerza electromotriz total en el circuito. Este momentum electromagnético es lo mismo que el Profesor Faraday le ha aplicado el nombre del Estado Electrotónico.

Si el circuito es el límite del área elemental *dydz*, entonces el momentum electromagnético es

$$\left(\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}\right)dy\,dz\ ,$$

y este es el número de líneas de fuerza magnética que pasan a través del área *dydz*.

Fuerza magnética (α, β, γ)

(59) Supongamos que α, β, γ representan la fuerza que actúa sobre un polo magnético unitario colocado en el punto dado resuelto en las direcciones de *x*, *y* y *z*.

Coeficiente de inducción magnética (μ)

(60) Sea μ la relación entre la inducción magnética en un medio dado y la del aire bajo una fuerza de magnetización igual, entonces el número de líneas de fuerza en la unidad de área perpendicular a *x* será $\mu\alpha$ (μ es una cantidad que depende de la naturaleza del medio, su temperatura, la cantidad de magnetización ya producida, y que varía con la dirección en cuerpos cristalinos).

(61) Expresando el momentum eléctrico de pequeños circuitos perpendiculares a los tres ejes mediante esta notación, obtenemos el siguiente

Ecuaciones de fuerza magnética

$$\left.\begin{aligned}\mu\alpha &= \frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz},\\ \mu\beta &= \frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx},\\ \mu\gamma &= \frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy},\end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

Ecuaciones de las corrientes

(62) Por experiencia se sabe que el movimiento de un polo magnético en el campo electromagnético en un circuito cerrado no puede generar trabajo a menos que el circuito que describe el polo pase alrededor de una corriente eléctrica. Por lo tanto, excepto en el espacio ocupado por las corrientes eléctricas,

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = d\varphi \qquad (31)$$

es una diferencial completa de φ, el potencial magnético.

La cantidad φ puede ser susceptible de un número indefinido de valores distintos, de acuerdo con el número de veces que el punto de exploración pasa alrededor de las corrientes eléctricas en su curso. La diferencia entre valores sucesivos de φ correspondiente a un pasaje completamente circular de una corriente de fuerza *c*, es 4π*c*.

Por lo tanto, si no hay corriente eléctrica

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 0$$

Pero si hay una corriente *p'*

Análogamente,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} &= 4\pi p' \\ \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} &= 4\pi q' \\ \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} &= 4\pi r' \end{aligned}\right\} \qquad (C)$$

A estas ecuaciones, las podemos llamar *ecuaciones de las corrientes.*

Fuerza electromotriz en un circuito

(63) Sea ξ la fuerza electromotriz que actúa en el circuito *A*, luego

$$\xi = \int \left(P\frac{dx}{ds} + Q\frac{dy}{ds} + R\frac{dz}{ds} \right) ds \qquad 32)$$

donde *ds* es el elemento de longitud, y la integración se realiza a lo largo de todo el circuito.

Suponga que las fuerzas en el campo sean las debidas a los circuitos *A* y *B*, entonces el momentum electromagnético de *A* es

$$\int \left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds} \right) ds = Lu + Mv \qquad (33)$$

donde *u* y *v* son las corrientes que circulan por *A* y *B*, y

$$\xi = -\frac{d}{dt}\left(Lu + Mv\right) \qquad (34)$$

Si no hubiera movimiento en el circuito *A*

$$\left.\begin{aligned} P &= -\frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx} \\ Q &= -\frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy} \\ R &= -\frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Donde Ψ es una función de *x, y, z* y *t*, que es indeterminada en cuanto a la solución de las ecuaciones anteriores, porque los términos que dependen de ella desaparecerán al integrarse alrededor del circuito. Sin embargo, la cantidad Ψ siempre puede determinarse en un caso particular cuando conocemos las condiciones reales del caso. La interpretación física de Ψ es que representa el *potencial eléctrico* en cada punto del espacio.

Fuerza electromotriz en un conductor en movimiento

(64) Supongamos que un conductor recto, corto, de longitud *a*, paralelo al eje de *x* se mueve con una velocidad cuyas componentes son *dx/dt*, *dy/dt*, *dz/dt* permitiendo que sus extremidades se deslicen a lo largo de dos conductores paralelos con una velocidad *ds/dt*. Busquemos la alteración del momentum electromagnético del circuito del cual esta disposición forma parte.

En una unidad de tiempo, el conductor en movimiento ha recorrido las distancias *dx/dt*, *dy/dt*, *dz/dt*, a lo largo de las direcciones de los tres ejes, y al mismo tiempo las longitudes de los conductores paralelos incluidos en el circuito han aumentado cada una en *ds/dt*.

Por ello, la cantidad

$$\int\left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right)ds$$

aumentará debido a los siguientes incrementos

$a\left(\frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dt}\right)$ debido al movimiento del conductor.

$-a\frac{ds}{dt}\left(\frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dG}{dx}\frac{dy}{dt} + \frac{dH}{dx}\frac{dz}{dt}\right)$ debido al alargamiento del circuito.

Por lo tanto, el incremento total será

$$a\left(\frac{dF}{dy} - \frac{dG}{dx}\right)\frac{dy}{dt} - a\left(\frac{dH}{dx} - \frac{dF}{dz}\right)\frac{dz}{dt};$$

O, en función de las ecuaciones de la Fuerza Magnética (8)

$$-\alpha = \left(\mu\gamma \frac{dy}{dt} - \mu\beta \frac{dz}{dt} \right)$$

Si P es la fuerza electromotriz en el conductor móvil paralelo a x, referido a la unidad de longitud, entonces la fuerza electromotriz real es $P\alpha$ y dado que esta es medida por la disminución del momentum electromagnéticos del circuito, la fuerza electromotriz debida al movimiento será

$$P = \mu\gamma \frac{dy}{dt} - \mu\beta \frac{dz}{dt} \tag{36}$$

(65) Las ecuaciones completas de la fuerza electromotriz sobre un conductor en movimiento, pueden ahora escribirse de la siguiente manera: —

Ecuaciones de la Fuerza Electromotriz

$$\left.\begin{aligned} P &= \mu\left(\gamma \frac{dy}{dt} - \beta \frac{dz}{dt} \right) - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx} \\ Q &= \mu\left(\alpha \frac{dz}{dt} - \gamma \frac{dx}{dt} \right) - \frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy} \\ R &= \mu\left(\beta \frac{dx}{dt} - \alpha \frac{dy}{dt} \right) - \frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz} \end{aligned}\right\} \tag{D}$$

El primer término en el lado derecho de cada ecuación representa la fuerza electromotriz que surge del movimiento del conductor mismo. Esta fuerza electromotriz es perpendicular a la dirección del movimiento y a las líneas de fuerza magnética; y si se dibujara un paralelogramo cuyos lados representen en dirección y magnitud la velocidad del conductor y la inducción magnética en ese punto del campo, entonces el área del paralelogramo representará la fuerza electromotriz debida al movimiento del conductor, y la dirección de la fuerza será perpendicular al plano del paralelogramo.

El segundo término en cada ecuación indica el efecto de los cambios en la posición o en las fuerza de los imanes o las corrientes en el campo.

El tercer término muestra el efecto del potencial eléctrico Ψ. No tiene ningún efecto en provocar una corriente circulante en un circuito cerrado. Indica la existencia de una fuerza que impulsa la electricidad hacia o desde ciertos puntos definidos en el campo.

Elasticidad eléctrica

(66) Cuando una fuerza electromotriz actúa sobre un dieléctrico, pone cada parte del dieléctrico en una condición polarizada, en la que sus lados opuestos están electrizados opuestamente. La cantidad de esta electrificación depende de la fuerza electromotriz y de la naturaleza de la sustancia, y, en sólidos que tienen una estructura definida según sus ejes, en la dirección de la fuerza electromotriz con respecto a estos ejes. En sustancias isótropas, si k es la relación entre la fuerza electromotriz y el desplazamiento eléctrico, podemos escribir las

Ecuaciones de elasticidad eléctrica.

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{P} &= \boldsymbol{kf} \\ \boldsymbol{Q} &= \boldsymbol{kg} \\ \boldsymbol{R} &= \boldsymbol{kh} \end{aligned}\right\} \qquad (E)$$

Resistencia eléctrica

67) Cuando una fuerza electromotriz actúa sobre un conductor, produce una corriente de electricidad a través de él. Este efecto es adicional al desplazamiento eléctrico ya considerado. En sólidos de estructura compleja, la relación entre la fuerza electromotriz y la corriente depende de su dirección a través del sólido. En las sustancias isótropas, que solo consideraremos aquí, si ρ es la resistencia específica referida a la unidad de volumen, podemos escribir las

Ecuaciones de la resistencia eléctrica

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{P} &= -\rho\, \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{Q} &= -\rho\, \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{R} &= -\rho\, \boldsymbol{r} \end{aligned}\right\} \qquad (F)$$

Cantidad eléctrica

(68) Supongamos que e representa la cantidad de electricidad positiva libre contenida en la unidad de volumen en cualquier parte del campo; luego, dado que esto surge de la electrificación de las diferentes partes del campo que no se neutralizan entre sí, podemos escribir la

Ecuación de la electricidad libre

$$e + \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0 \qquad (G)$$

(69) Si el medio es conductor de la electricidad, entonces tendremos otra condición, que podría llamarse, como en hidrodinámica, la

Ecuación de continuidad

$$\frac{de}{dt} + \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0 \qquad (H)$$

(70) En estas ecuaciones del campo electromagnético hemos supuesto veinte cantidades variables, a saber,

Para el momentum electromagnético	$F \quad G \quad H$
Para la intensidad magnética	$\alpha \quad \beta \quad \gamma$
Para la fuerza electromotriz	$P \quad Q \quad R$
Para la corriente debida a una conducción verdadera	$p \quad q \quad r$
Para el desplazamiento eléctrico	$f \quad g \quad h$
Para la corriente total (incluida la variación del desplazamiento)	$p' \quad q' \quad r'$
Para la cantidad de electricidad libre	e
Para el potencial eléctrico	Ψ

Entre esas veinte cantidades hemos encontrado veinte ecuaciones, a saber:

Tres ecuaciones para la fuerza magnética	(***B***)
Tres ecuaciones para las corrientes eléctricas	(***C***)
Tres ecuaciones para la fuerza electromotriz	(***D***)
Tres ecuaciones para la elasticidad eléctrica	(***E***)
Tres ecuaciones para la resistencia eléctrica	(***F***)
Tres ecuaciones para el movimiento total de la electricidad	(***A***)
Una ecuación para la electricidad libre	(***G***)
Una ecuación de continuidad	(***H***)

Estas ecuaciones son suficientes para determinar todas las relaciones entre las cantidades que se dan entre ellas, siempre que conozcamos las condiciones del problema. No obstante, en muchos casos, solo se requieren algunas de las ecuaciones.

Energía intrínseca del campo electromagnético

(71) Hemos visto (33) que la energía intrínseca de cualquier sistema de corrientes se encuentra al multiplicar la mitad de la corriente en cada circuito por su momentum electromagnético. Esto es equivalente a encontrar la integral

$$E = \frac{1}{2}\sum\left(Fp' + Gq' + Hr'\right) dV \tag{37}$$

sobre todo el espacio ocupado por las corrientes, donde *p', q', r'* son los componentes de las corrientes, y *F, G, H* los componentes del momentum electromagnético.

Sustituyendo los valores de *p ', q', r'* de las ecuaciones de las Corrientes (C), esto se convierte

$$\frac{1}{8\pi}\sum\left\{F\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}\right)+G\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}\right)+H\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)\right\}dV$$

Integrando por partes y recordando que α, β, γ, se anulan a una distancia infinita, esta expresión se convierte en

$$\frac{1}{8\pi}\sum\left\{\alpha\left(\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}\right)+\beta\left(\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx}\right)+\gamma\left(\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}\right)\right\}dV$$

Donde la integración está extendida a todo el espacio. Referida a la ecuación de la Fuerza Magnética (*B*), esta ecuación se vuelve

$$E = \frac{1}{8\pi}\sum\left\{\alpha\times\mu\alpha+\beta\times\mu\alpha+\gamma\times\mu\gamma\right\}dV \tag{38}$$

Donde α, β, γ, son las componentes de la intensidad magnética, o la fuerza por unidad de polo magnético, y $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$, son las componentes de la cantidad de inducción magnética, o el número de líneas de fuerza en la unidad de área.

En medios isótropos, el valor de μ es el mismo en todas las direcciones y podemos expresar el resultado de manera más simple diciendo que la energía intrínseca de cualquier parte del campo magnético que surge de su magnetización es

$$\frac{\mu}{8\pi} I^2$$

por unidad de volumen, donde *I* es la intensidad magnética.

(72) La energía puede almacenarse en el campo de una manera diferente, por ejemplo, mediante la acción de la fuerza electromotriz en la producción de desplazamiento eléctrico. El trabajo realizado por una fuerza electromotriz variable, *P*, al producir un desplazamiento variable, *f*, se obtiene integrando

$$\int Pdf$$

entre $P = 0$ y el valor dado de *P*.

Como $P = kv$, ecuación (*E*), esta cantidad se vuelve

$$\int kfdf = \frac{1}{2}kf^2 = \frac{1}{2}Pf$$

Por lo tanto, la energía intrínseca de cualquier parte del campo, tal como existe en forma de desplazamiento eléctrico, es

$$\frac{1}{2}\sum(Pf + Qg + Rh)dV$$

y la energía total existente en el campo será

$$E = \sum\left\{\frac{1}{8\pi}(\alpha\mu\alpha + \beta\mu\beta + \gamma\mu\gamma) + \frac{1}{2}(Pf + Qg + Rh)\right\}dV \qquad (I)$$

El primer término de esta expresión depende de la magnetización del campo, y es explicado, en nuestra teoría, por el movimiento real de algún tipo. El segundo término depende de la polarización eléctrica del campo, y se explica, en nuestra teoría, por la tensión de algún tipo en un medio elástico.

(73) En una ocasión anterior* intenté describir un tipo particular de movimiento y un tipo particular de tensión, dispuestos de tal manera como para dar cuenta de los fenómenos. En el presente artículo evito cualquier hipótesis de este tipo; y al usar palabras como momentum eléctrico y elasticidad eléctrica en referencia a los fenómenos conocidos de la inducción de corrientes y la polarización de los dieléctricos, simplemente deseo dirigir la mente del lector a fenómenos mecánicos que lo ayudarán a comprender a los eléctricos. Todas estas frases en el presente documento deben considerarse como ilustrativas, no como explicativas.

(74) Al hablar de la Energía del campo, sin embargo, deseo ser entendido literalmente. Toda la energía es la mismo que la energía mecánica, ya sea que exista en forma de movimiento o de elasticidad, o en cualquier otra forma. La energía en los fenómenos electromagnéticos es energía mecánica. La única pregunta es, ¿dónde reside? En las viejas teorías, se suponía que residía en los

* **“On the Physical Lines of Force”, *Philosophical Magazine*, 1861-62.**

cuerpos electrificados, circuitos conductores e imanes, en la forma de una cualidad desconocida que se ha llamado energía potencial o el poder de producir ciertos efectos a distancia. En nuestra teoría, la energía reside en el campo electromagnético, en el espacio que lo rodea a los cuerpos electrizados y magnéticos, así como en los cuerpos mismos, y se presenta en dos formas diferentes, que pueden describirse, sin hipótesis, como polarización magnética y polarización eléctrica, o, de acuerdo con una hipótesis muy probable, como el movimiento y la tensión de uno y el mismo medio.

(75) Las conclusiones a las que llegamos en el presente trabajo son independientes de esta hipótesis y son solamente, deducidas de hechos experimentales de tres tipos:

1. La inducción de corrientes eléctricas por el aumento o la disminución de corrientes vecinas según los cambios en las líneas de fuerza que pasan por el circuito.

2. La distribución de la intensidad magnética de acuerdo con las variaciones de un potencial magnético.

3. La inducción (o influencia) de electricidad estática a través de dieléctricos.

Ahora podemos proceder a demostrar a partir de estos principios la existencia y las leyes de las fuerzas mecánicas que actúan sobre las corrientes eléctricas, los imanes y los cuerpos electrificados colocados en el campo electromagnético.

PARTE IV. ACCIONES MECÁNICAS EN EL CAMPO

Fuerza mecánica sobre un conductor móvil

(76) Hemos demostrado (§§ 34 y 35) que el trabajo realizado por las fuerzas electromagnéticas para ayudar al movimiento de un conductor es igual al producto de la corriente en el conductor multiplicado por el incremento del momentum electromagnético debido al movimiento.

Sea un conductor recto de longitud corta *a* que se mueva paralelo a sí mismo en la dirección de *x*, con sus extremos en dos conductores paralelos. Entonces el incremento del momentum electromagnético debido al movimiento de *a* será

$$a\left(\frac{dF}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dx}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dx}\frac{dz}{ds}\right)\delta x\ .$$

El incremento debido al alargamiento del circuito al aumentar la longitud de los conductores paralelos será

$$-a\left(\frac{dF}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{ds}\right)\delta x\ .$$

El incremento total es

$$a\delta x\left\{\frac{dy}{ds}\left(\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}\right)-\frac{dz}{ds}\left(\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx}\right)\right\},$$

Que, de acuerdo con las ecuaciones de la Fuerza magnética (*B*)

$$a\delta x\left\{\frac{dy}{ds}\mu\gamma-\frac{dz}{ds}\mu\beta\right\}.$$

Sea *X* la fuerza que actúa a lo largo de la dirección de *x* por unidad de longitud del conductor; entonces, el trabajo realizado es $Xa\delta x$.

Sea *C* la corriente en el conductor y sean *p’*, *q’*, *r’* sus componentes, entonces

$$Xa\delta = Ca\delta xx\left(\frac{dy}{ds}\mu\gamma-\frac{dz}{ds}\mu\beta\right),$$

Análogamente
$$\left.\begin{aligned} X &= \mu\gamma q' - \mu\beta r' \\ Y &= \mu\alpha r' - \mu\gamma p' \\ Z &= \mu\beta p' - \mu\alpha q' \end{aligned}\right\} \qquad (J)$$

Estas son las ecuaciones que determinan la fuerza mecánica que actúa sobre un conductor que transporta una corriente. La dirección de la fuerza es perpendicular a la corriente y a las líneas de fuerza, y se mide por el área del paralelogramo formado por líneas paralelas a la corriente y las líneas de fuerza, y es proporcional a sus intensidades.

Fuerza mecánica de un imán

(77) En cualquier parte del campo no atravesada por las corrientes eléctricas, la distribución de la intensidad magnética puede representarse por los coeficientes diferenciales de una función que puede denominarse potencial magnético. Cuando no hay corrientes en el campo, esta cantidad tiene un valor único para cada punto. Cuando hay corrientes, el potencial tiene una serie de valores en cada punto, pero sus coeficientes diferenciales tienen solo un valor, es decir,

$$\frac{d\varphi}{dx} = \alpha\,, \quad \frac{d\varphi}{dy} = \beta\,, \quad \frac{d\varphi}{dz} = \gamma\,,$$

Sustituyendo esos valores de α, β, γ, en la expresión para la energía intrínseca del campo, (ecuación 38), e integrando por partes se obtiene:

$$-\sum\left\{\varphi\frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\mu\alpha}{dx}+\frac{d\mu\beta}{dy}+\frac{d\mu\gamma}{dz}\right)\right\}dV\,.$$

La expresión

$$\sum\left(\frac{d\mu\alpha}{dx}+\frac{d\mu\beta}{dy}+\frac{d\mu\gamma}{dz}\right)dV = \sum m dV$$

indica el número de líneas de fuerza magnética que tienen su origen dentro del espacio *V*. Ahora solo conocemos un polo magnético como el origen o la terminación de las líneas de fuerza magnética, y un polo unitario es aquel que tiene 4π líneas pertenecientes a ella, ya que produce una unidad de intensidad magnética a la unidad de distancia sobre una esfera cuya superficie es 4π.

Por lo tanto, si *m* es la cantidad de carga magnética positiva libre en la unidad de volumen, la expresión anterior puede escribirse $4\pi m$, y la expresión de la energía del campo se convierte en

$$E = -\sum\left(\frac{1}{2}\varphi m\right)dV\,. \qquad (40)$$

Si hay dos polos magnéticos m_1 y m_2 produciendo potenciales φ_1 y φ_2 en el campo, entonces, si m_2 se mueve una distancia *dx* y es enviada en esa dirección por una fuerza *X*, el trabajo realizado será *Xdx* y la disminución de la energía en el campo será

$$d\left(\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)(m_1+m_2)\right),$$

y esto debe ser igual, de acuerdo con el Principio de Conservación de la Energía.

Como la distribución φ_1 está determinada por m_1 y φ_2 por m_2, las cantidades $\varphi_1 m_1$ y $\varphi_2 m_2$ permanecerán constantes

Tal como Green ha probado (*Essay*, p. 10) se puede demostrar que

$$\varphi_2 m_1 = \varphi_1 m_2$$

De modo que

$$Xdx = d(m_2\varphi_1)$$

o, llamando α_1, β_1, γ_1 a las intensidades magnéticas en las tres direcciones del espacio debidas a m_1

$$\left.\begin{array}{c} X = m_2\dfrac{d\varphi_1}{dx} = m_2\alpha_1 \\ Y = m_2\beta_1 \\ Z = m_2\gamma_1 \end{array}\right\} \qquad (K)$$

de modo que un polo magnético es impulsado en la dirección de las líneas de fuerza magnética con una fuerza igual al producto de la fuerza del polo y la intensidad magnética.

(78) Si se colocara en el campo un solo polo magnético, lo que sería el polo de un imán enormemente largo, la única solución para φ sería

$$\varphi_1 = -\frac{m_1}{\mu}\frac{1}{r} \qquad (41)$$

Donde m_1 es la carga magnética del polo y *r* la distancia al polo.

La repulsión entre dos polos de cargas magnéticas m_1 y m_2, es

$$m_2\frac{d\varphi_1}{dr} = \frac{m_1 m_2}{\mu r^2}$$

En el aire, o en cualquier otro medio en el cual $\mu = 1$, esto es simplemente m_1m_2/r^2 pero en otros medios, la fuerza actuante entre dos polos magnéticos dados es inversamente proporcional al coeficiente de inducción magnética del medio. Esto puede explicarse por la magnetización del medio inducida por la acción de los polos.

Fuerza mecánica sobre un cuerpo electrificado

(79) Si no hay movimiento o cambio de intensidad de las corrientes o imanes en el campo, la fuerza electromotriz se debe enteramente a la variación del potencial eléctrico, y tendremos (§65)

$$P = -\frac{d\Psi}{dx}, \quad Q = -\frac{d\Psi}{dy}, \quad R = -\frac{d\Psi}{dz},$$

Integrando por partes la expresión (*I*) para la energía debida al desplazamiento eléctrico y recordando que *P*, *Q y R* se anulan a una distancia infinita, esa expresión se vuelve

$$\frac{1}{2}\sum\left\{\Psi\left(\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}\right)\right\}dV,$$

o, por la ecuación de la electricidad libre (*G*)

$$-\frac{1}{2}\sum\left(\Psi e\right)dV.$$

Mediante la misma demostración que se usó en el caso de la acción mecánica sobre un imán, se puede demostrar que la fuerza mecánica sobre un cuerpo pequeño que contiene una cantidad de electricidad libre e_2 colocada en un campo cuyo potencial proveniente de otros cuerpos electrificados es Ψ_1 tiene por componentes

$$\left.\begin{aligned} X &= e_2\frac{d\Psi_1}{dx} - P_1e_2 \\ Y &= e_2\frac{d\Psi_1}{dy} - Q_1e_2 \\ Z &= e_2\frac{d\Psi_1}{dz} - R_1e_2 \end{aligned}\right\} \qquad (D)$$

De modo que un cuerpo electrificado es impulsado en la dirección de la fuerza electromotriz con una fuerza igual al producto entre la cantidad de electricidad libre y la fuerza electromotriz.

Si la electrificación del campo surge de la presencia de un pequeño cuerpo electrificado que contiene e_1 de electricidad libre, la única solución para Ψ_1 es

$$\Psi_1 = \frac{k}{4\pi}\frac{e_1}{r} \qquad (43)$$

donde r es la distancia a la que se encuentra el cuerpo electrificado.

Por lo tanto, la repulsión entre dos cuerpos electrificados con cargas e_1 y e_2 será

$$e_2 \frac{d\Psi_1}{dr} = \frac{k}{4\pi} \frac{e_1 e_2}{r^2} \tag{44}$$

Medición de los efectos electrostáticos

(80) Las cantidades con las que hemos tenido que tratar han sido expresadas hasta ahora en términos del Sistema Electromagnético de medición, que se basa sobre la acción mecánica entre las corrientes. El sistema electrostático de medición se basa en la acción mecánica entre cuerpos electrificados, y es independiente, e incompatible, con el sistema electromagnético; de modo que las unidades de los diferentes tipos de cantidad tienen valores diferentes según el sistema que adoptemos, y para pasar de un sistema a otro, se requiere una reducción de todas las cantidades.

De acuerdo con el sistema electrostático, la repulsión entre dos pequeños cuerpos cargados con cantidades η_1 y η_2 de electricidad es

$$\frac{\eta_1 \eta_2}{r^2}$$

donde r es la distancia entre ellos.

Sea la relación entre los dos sistemas, tal que una unidad electromagnética de electricidad contiene v unidades electrostáticas, entonces $\eta_1 = ve_1$ y $\eta_2 = ve_2$ y esta repulsión se puede expresar:

$$v^2 \frac{e_1 e_2}{r^2} = \frac{k}{4\pi} \frac{e_1 e_2}{r^2}, \text{ por la ecuación (44)} \tag{45}$$

donde k, el coeficiente de “elasticidad eléctrica” en el medio en el cual se efectúan los experimentos— por ejemplo, aire común — está vinculado a v, el número de unidades electrostáticas en una unidad electromagnética, mediante la ecuación:

$$k = 4\pi v^2 \tag{46}$$

La cantidad v puede determinarse experimentalmente de diversas maneras. De acuerdo con los experimentos de los Sres. Weber y Kohlrausch,

V = 310.740.000 metros por segundo

(81) De esta investigación surge que, si suponemos que el medio que constituye el campo electromagnético, cuando es dieléctrico, es capaz de recibir en cada parte del mismo una polarización eléctrica, en la que los lados opuestos de cada elemento en el que podamos concebir

que el medio dividido está electrificado opuestamente, y si también asumimos que esta polarización o desplazamiento eléctrico es proporcional a la fuerza electromotriz que lo produce o mantiene, entonces podemos demostrar que los cuerpos electrificados en un medio dieléctrico actuarán el uno sobre el otro con fuerzas que obedecen las mismas leyes establecidas por el experimento.

La energía involucrada en las atracciones y repulsiones eléctricas que se producen, se supone almacenada en el medio dieléctrico que rodea los cuerpos electrificados, y no en la superficie de los cuerpos mismos, que en nuestra teoría son simplemente las superficies delimitadoras del aire, u otro dieléctrico, en el que se buscarán las verdaderas causas de la acción.

Nota sobre la atracción gravitatoria

(82) Después de asignar a la acción del medio circundante las atracciones y las repulsiones tanto magnéticas como eléctricas, y al encontrar que dependen del cuadrado inverso de la distancia, esto nos lleva naturalmente a preguntar si la atracción gravitatoria, que sigue a la misma ley respecto de la distancia, no es también asignable a la acción de un medio circundante.

La gravitación difiere del magnetismo y la electricidad en lo siguiente; que los cuerpos en cuestión son todos del mismo tipo, en vez de ser de signos opuestos, como los polos magnéticos y los cuerpos electrificados, y que la fuerza entre estos cuerpos es una atracción y no una repulsión, como es el caso entre cuerpos eléctricos y magnéticos similares.

Las líneas de fuerza gravitacionales en las proximidades de dos cuerpos densos, son exactamente de la misma forma que las líneas de fuerzas magnéticas cerca de dos polos del mismo nombre; pero mientras que los polos son repelidos, en el caso de los cuerpos, son atraídos. Sea E la energía intrínseca del campo que rodea a dos cuerpos gravitantes M_1 y M_2, y que E' sea la energía intrínseca del campo que rodea a dos polos magnéticos m_1 y m_2, de iguales valores numérico a M_1 y M_2, y que X sea la fuerza gravitatoria que actúa durante el desplazamiento δx y X' la fuerza magnética,

$$X\delta x = \delta E, \qquad X'\delta x = \delta E';$$

X y X' tienen igual valor numérico pero signos opuestos, de modo que

$$\delta E = -\delta E',$$

$$E = C - E'$$

$$= C - \sum \frac{1}{8\pi}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right) dV$$

donde α, β, γ, son las componentes de la intensidad magnética. Si R es la fuerza gravitante resultante, y R' la fuerza magnética resultante en una parte correspondiente del campo,

$$\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{R'} \quad \text{y} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{R'}^2$$

Luego

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{C} - \sum \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8\pi}} \boldsymbol{R}^2 \boldsymbol{dV} \tag{47}$$

La energía intrínseca del campo de gravitación debe ser menor donde sea que haya una fuerza gravitante resultante.

Como la energía es esencialmente positiva, es imposible que una parte del espacio tenga energía intrínseca negativa. Por lo tanto, aquellas partes del espacio en las que no hay fuerza resultante, como los puntos de equilibrio en el espacio entre los diferentes cuerpos de un sistema, y dentro de la sustancia de cada cuerpo, deben tener una energía intrínseca por unidad de volumen mayor que

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8\pi}} \boldsymbol{R}^2,$$

donde R es el mayor valor posible de la intensidad de la fuerza gravitante en cualquier parte del universo.

Por lo tanto, la suposición de que la gravedad proviene de la acción del medio circundante en la forma señalada, lleva a la conclusión de que cada parte de este medio posee, cuando no se interfiere, una enorme energía intrínseca, y que la presencia de cuerpos densos influye en el medio para disminuir esta energía dondequiera que haya una atracción resultante.

Como no puedo entender de qué manera un medio puede poseer tales propiedades, no puedo avanzar más en esta dirección en la búsqueda de la causa de la gravedad.

PARTE V – TEORÍA DE LOS CONDENSADORES

Capacidad de un condensador

(83) La forma más simple de condensador consiste en una capa uniforme de materia aislante limitada por dos superficies conductoras, y su capacidad se mide por la cantidad de electricidad en cada superficie cuando la diferencia de potenciales es la unidad.

Sea S el área de cualquier superficie, *a* el espesor del dieléctrico y *k* su coeficiente de elasticidad eléctrica; entonces, en un lado del condensador, el potencial esΨ_1, y en el otro lado Ψ_1+ 1y dentro de su sustancia

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{1}{a} = kf \qquad (48)$$

Dado que $d\Psi/dx$, y por lo tanto *f*, es cero fuera del condensador, la cantidad de electricidad sobre su primera superficie es igual a – *Sf* y sobre la segunda + *Sf*. La capacidad del condensador será entonces ***Sf* = *S*/*ak*** en unidades electromagnéticas.

Capacidad específica de la inducción eléctrica (*D*)

(84) Si el dieléctrico del condensador es aire, entonces su capacidad en medidas electrostáticas es $S / 4\pi a$ (despreciando las correcciones que surgen de las condiciones que deben cumplirse en los bordes). Si el dieléctrico tiene una capacidad cuya relación con la del aire es *D*, entonces la capacidad del condensador será $DS/4\pi a$.

Por lo tanto

$$D = \frac{k_0}{k}$$

dondek_0 es el valor de *k* en el aire, el que se toma como unidad.

Absorción eléctrica

(85) Cuando el dieléctrico que forma el condensador no es un aislante perfecto, los fenómenos de conducción se combinan con los del desplazamiento eléctrico. El condensador, cuando se lo deja cargado, pierde gradualmente su carga, y en algunos casos, después de descargarse por completo,

adquiere gradualmente una nueva carga del mismo signo que la carga original, y esta finalmente desaparece. Estos fenómenos han sido descritos por el Profesor Faraday (*Experimental Investigations*, Serie XL) y por el Sr. F. Jerkin (*Report of Committee of Board of Trade on submarine Cables*) y pueden clasificarse bajo el nombre de "*Absorción Eléctrica*".

(86) Tomaremos el caso de un condensador compuesto por cualquier cantidad de capas paralelas de diferentes materiales. Si la diferencia constante de potenciales entre sus superficies extremas se mantiene durante un tiempo suficiente hasta que se establezca una condición de flujo constante estable de electricidad, entonces cada superficie delimitada tendrá una carga de electricidad que depende de la naturaleza de las sustancias en cada lado de ella. Si las superficies extremas se descargan ahora, estas cargas internas se disiparán gradualmente, y una cierta carga puede reaparecer en las superficies extremas si están aisladas o, si están conectadas por un conductor, se puede instar a una cierta cantidad de electricidad a través del conductor durante el restablecimiento del equilibrio.

Supongamos que los grosores de las diversas capas del condensador sean a_1, a_2, etc. Supongamos que los valores de k para estas capas sean, respectivamente, k_1, k_2, etc., y sea

$$\boldsymbol{a_1k_1 + a_2k_2 + \text{etc.} = ak}$$

donde k es la elasticidad eléctrica del aire y a es el espesor de un condensador de aire equivalente.

Supongamos que las resistencias de las capas sean, respectivamente, r_1, r_2, etc., y hagamos que $r_1 + r_2 + \text{etc.} = r$ sea la resistencia de todo el condensador a una corriente estacionaria que lo atraviesa por unidad de superficie.

Sean f_1, f_2, etc., los desplazamientos eléctricos en cada capa.

Sean p_1, p_2, etc., las corrientes eléctricas en cada capa.

Sea Ψ_1 el potencial sobre la primer superficie y e_1 la carga eléctrica por unidad de superficie.

Sean Ψ_2 y e_2 las correspondientes cantidades en el límite entre la primera y la segunda superficie, y así sucesivamente. Entonces, por la ecuaciones (G) y (H)

$$\left.\begin{array}{ll} e_1 = -f_1, & \dfrac{de_1}{dt} = -p_1, \\ e_2 = f_1 - f_2, & \dfrac{de_1}{dt} = p_1 - p_2, \\ etc. & etc. \end{array}\right\} \qquad (51)$$

Pero, por las ecuaciones (E) y (F)

$$\left.\begin{aligned}\Psi_1-\Psi_2 &= a_1k_1f_1=r_1p_1\\ \Psi_2-\Psi_3 &= a_2k_2f_2=r_2p_2\\ etc. \quad & \quad etc. \qquad etc.\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Después de mantener la fuerza electromotriz durante un tiempo suficiente, la corriente se vuelve igual en cada capa, y

$$p_1=p_2=etc.=p=\frac{\Psi}{r}$$

dondeΨ es la diferencia de potencial entre las capas extremas. Entonces, tenemos

$$\left.\begin{aligned}f_1&=-\frac{\Psi}{r}\frac{r_1}{a_1k_1}, & f_2&=-\frac{\Psi}{r}\frac{r_2}{a_2k_2}, etc.\\ e_1&=\frac{\Psi}{r}\frac{r_1}{a_1k_1}, & e_2&=\frac{\Psi}{r}\left(\frac{r_2}{a_2k_2}-\frac{r_1}{a_1k_1}\right), etc.\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Estas son las cantidades de electricidad sobre las diferentes superficies.

(87) Supongamos, ahora, que el condensador se descargue conectando las superficies extremas a través de un conductor perfecto para que sus potenciales se igualen instantáneamente, con lo que se alterará la electricidad en las superficies extremas, pero en las superficies internas no tendrá tiempo de alterarse. La diferencia total de potenciales será entonces

$$\Psi'=a_1k_1e'_1+a_2k_2\left(e'_1+e_2\right)+a_3k_3\left(e'_1+e_2+e_3\right), etc.=0 \tag{54}$$

donde, si e'_1 es lo que e_1 se vuelve en el instante de la descarga

$$e'_1=\frac{\Psi}{r}\frac{r_1}{a_1k_1}-\frac{\Psi}{ak}=e_1-\frac{\Psi}{ak} \tag{55}$$

Por lo tanto, la descarga instantánea es Ψ/ak, o la cantidad de electricidad que sería descargada por un condensador de aire del grosor equivalente, y no es afectada por la falta de un aislamiento perfecto.

(88) Supongamos ahora que se corta la conexión entre las superficies extremas y que el condensador se abandona a su evolución espontánea, y consideremos la disipación gradual de las cargas internas. Sea Ψ' la diferencia de potencial de las superficies extremas en cualquier instante t; entonces

$$\Psi'=a_1k_1f_1+a_2k_2f_2+etc. \tag{56}$$

Pero

$$a_1 k_1 f_1 = -r_1 \frac{df_1}{dt}$$

$$a_2 k_2 f_2 = -r_2 \frac{df_2}{dt}$$

De este se encuentra que $f_1 = A_1 e^{-\frac{a_1 k_1}{r_1}}$, $f_2 = A_2 e^{-\frac{a_2 k_2}{r_2}}$, etc., y al referirse a los valores de e'_1. e_2, etc., se encuentra

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = \dfrac{\Psi}{r}\dfrac{r_1}{a_1 k_1} - \dfrac{\Psi}{ak} \\ A_2 = \dfrac{\Psi}{r}\dfrac{r_2}{a_2 k_2} - \dfrac{\Psi}{ak}. \\ etc. \end{array}\right\} \tag{57}$$

lo que nos permite encontrar la diferencia de potenciales extremos en cualquier momento.

$$\Psi' = \Psi\left\{\left(\frac{r_1}{r} - \frac{a_1 k_1}{ak}\right)^{e^{-\frac{a_1 k_1}{r_1}t}} + \left(\frac{r_2}{r} - \frac{a_2 k_2}{ak}\right)^{e^{-\frac{a_2 k_2}{r_2}t}} + etc.\right\} \tag{58}$$

(89) Según este resultado, si todas las capas están hechas de la misma sustancia, Ψ' siempre será cero. Si las capas son de sustancias diferentes, el orden en que estén colocadas es indiferente, y el efecto será el mismo ya sea que cada sustancia consista en una sola capa o esté dividida en cualquier cantidad de capas delgadas y dispuestas en cualquier orden entre capas delgadas de las otras sustancias Cualquier sustancia, por lo tanto, cuyas partes no son matemáticamente homogéneas, aunque puedan ser aparentemente así, puede exhibir fenómenos de absorción. Además, dado que el orden de magnitud de los coeficientes es el mismo que el de los índices, el valor de Ψ' nunca puede cambiar el signo, sino que debe comenzar desde cero, pasar a ser positivo y finalmente anularse.

(90) Consideremos ahora la cantidad total de electricidad que pasaría de la primera superficie a la segunda, si el condensador, después de estar completamente saturado por la corriente y luego descargado, tiene sus superficies extremas conectadas por un conductor de resistencia *R*. Sea *p* la corriente en este conductor; luego, durante la descarga,

$$\Psi' = p_1 r_1 + p_2 r_2 + etc. = pR \tag{59}$$

Integrando con respecto al tiempo, y llamando $q_{1,}q_2$. etc., a las cantidades de electricidad que atraviesan los diferentes conductores,

$$q_1 r_1 + q_2 r_2 + etc. = qR \tag{60}$$

Las cantidades de electricidad sobre las diversas superficies serán

$$e'_1 - q - q_1,$$
$$e_2 + q_1 - q_2,$$
$$etc.$$

y dado que al final todas estas cantidades se anulan, encontramos

$$q_1 = e'_1 - q$$
$$q_2 = e'_1 + e_2 - q$$

de donde

$$qR = \frac{\Psi}{r}\left(\frac{r_1^2}{a_1k_1} + \frac{r_2^2}{a_2k_2} + etc.\right) - \frac{\Psi r}{ak}$$

o

$$q = \frac{\Psi}{akrR}\left\{a_1k_1a_2k_2\left(\frac{r_1}{a_1k_1} - \frac{r_2}{a_2k_2}\right)^2 + a_2k_2a_3k_3\left(\frac{r_2}{a_2k_2} - \frac{r_3}{a_3k_3}\right)^2 + etc.\right\} \tag{61}$$

una cantidad esencialmente positiva; de modo que, cuando la electrificación primaria tiene una determinada dirección, la descarga secundaria siempre está en la misma dirección que la descarga primaria*.

*Desde que este trabajo fue comunicado a la Royal Society, he visto un artículo de M. Gaugaih en los Annales de Chimie de 1864, en el que ha deducido los fenómenos de absorción eléctrica y descarga secundaria de la teoría de los condensadores compuestos.

PARTE VI. – TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA DE LA LUZ

(91) Al comienzo de este documento utilizamos la hipótesis óptica de un medio elástico a través del cual se propagan las vibraciones de la luz, a fin de demostrar que tenemos motivos justificables para buscar, en el mismo medio, la causa de otros fenómenos además de los de la luz. Luego examinamos los fenómenos electromagnéticos, buscando su explicación en las propiedades del campo que rodea los cuerpos electrizados o magnetizados. De esta forma, llegamos a ciertas ecuaciones que expresan ciertas propiedades del campo electromagnético. Ahora procederemos a investigar si estas propiedades de lo que constituye el campo electromagnético, deducidas sólo de los fenómenos electromagnéticos, son suficientes para explicar la propagación de la luz a través de la misma sustancia.

(92) Supongamos que una onda plana cuyos cosenos directores son, *l*, *m*, *n* se propaga a través del campo con una velocidad *V*. Entonces todas las funciones electromagnéticas serán funciones de

$$w = lx + my + + nz - Vt$$

Las ecuaciones de la Fuerza Magnética, (*B*), se volverán

$$\mu\alpha = m\frac{dH}{dw} - n\frac{dG}{dw}$$

$$\mu\beta = n\frac{dF}{dw} - l\frac{dH}{dw}$$

$$\mu\gamma = l\frac{dG}{dw} - m\frac{dF}{dw}$$

Si multiplicamos estas ecuaciones respectivamente por *l*, *m* y *n* y las sumamos

$$l\mu\alpha + m\mu\beta + n\mu\gamma = 0 \qquad (62)$$

que muestra que la dirección de la magnetización debe estar en el mismo plano de la onda.

(93) Si combinamos las ecuaciones de la Fuerza Magnética (*B*) con las de las Corrientes eléctricas (*C*), y, por comodidad, abreviamos

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = J, \text{ y } \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} = \nabla^2 \qquad (63)$$

$$\left.\begin{aligned}4\pi\mu p' &= \frac{dJ}{dx} - \nabla^2 F\\ 4\pi\mu q' &= \frac{dJ}{dy} - \nabla^2 G\\ 4\pi\mu r' &= \frac{dJ}{dz} - \nabla^2 H\end{aligned}\right\}$$

Si el medio en el que se estableció el campo es un dieléctrico perfecto, no hay una conducción verdadera, y las corrientes *p*', *q*', *r* 'son solo variaciones en el desplazamiento eléctrico. Por las ecuaciones de las Corrientes Totales (*A*),

$$p' = \frac{df}{dt}, \quad q' = \frac{dg}{dt}, \quad r' = \frac{dh}{dt}, \tag{65}$$

Pero estos desplazamientos eléctricos son causados por fuerzas electromotrices y, por las ecuaciones de la Elasticidad eléctrica (*E*)

$$P = kf, \quad Q = kg, \quad R = kh, \tag{66}$$

Estas fuerzas electromotrices se deben a las variaciones de las funciones electromagnéticas o electrostáticas, ya que no hay movimiento de conductores en el campo; de modo que las ecuaciones de la fuerza electromotriz (*D*) son

$$\left.\begin{aligned}P &= -\frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx}\\ Q &= -\frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy}\\ R &= -\frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz}\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

(94) Combinando estas ecuaciones, podemos obtener las siguientes

$$\left.\begin{aligned}k\left(\frac{dJ}{dx} - \nabla^2 F\right) + 4\pi\mu\left(\frac{d^2F}{dt^2} + \frac{d^2\Psi}{dxdt}\right) &= 0\\ k\left(\frac{dJ}{dy} - \nabla^2 G\right) + 4\pi\mu\left(\frac{d^2G}{dt^2} + \frac{d^2\Psi}{dydt}\right) &= 0\\ k\left(\frac{dJ}{dz} - \nabla^2 H\right) + 4\pi\mu\left(\frac{d^2H}{dt^2} + \frac{d^2\Psi}{dzdt}\right) &= 0\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Si diferenciamos la tercera de estas ecuaciones con respecto a *y*, y la segunda con respecto a *z*, y las restamos, *J* e Ψ desaparecen, y recordando las ecuaciones (*B*) de la fuerza magnética, los resultados pueden escribirse

$$\left.\begin{aligned} k\nabla^2\mu\alpha &= 4\pi\mu\frac{d^2}{dt^2}\mu\alpha \\ k\nabla^2\mu\beta &= 4\pi\mu\frac{d^2}{dt^2}\mu\beta \\ k\nabla^2\mu\gamma &= 4\pi\mu\frac{d^2}{dt^2}\mu\gamma \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

(95) Si suponemos que α, β, γ, son funciones de *lx* + *my* + *nz* – *Vt* = *w*, la primera ecuación se vuelve en

$$k\mu\frac{d^2\alpha}{dw^2} = 4\pi\mu^2V^2\frac{d^2\alpha}{dw^2} \tag{70}$$

o

$$V = \pm\sqrt{\frac{k}{4\pi\mu}} \tag{71}$$

Las otras ecuaciones dan el mismo valor para *V*, de modo que la onda se propaga en cualquier dirección con una velocidad *V*.

Esta onda consiste enteramente en perturbaciones magnéticas, la dirección de la magnetización está en el mismo plano de la onda. Ninguna perturbación magnética cuya dirección de magnetización no se encuentre en el plano de la onda se puede propagar como una onda plana.

Por lo tanto, las perturbaciones magnéticas propagadas a través del campo electromagnético concuerdan con la luz en esto: que la perturbación en cualquier punto es transversal a la dirección de propagación, y que tales ondas pueden tener todas las propiedades de la luz polarizada.

(96) El único medio en el que se han realizado experimentos para determinar el valor de *k* es el aire, en el que μ = l, y por lo tanto, por la ecuación (46),

$$V = v \tag{72}$$

De acuerdo con los experimentos electromagnéticos de los Sres. Weber y Kohlrausch[*]

v = 310.740.000 metros por segundo

es el número de unidades electrostáticas en una unidad electromagnética de electricidad, y esto, de acuerdo con nuestro resultado, debe ser igual a la velocidad de la luz en el aire o en el vacío.

La velocidad de la luz en el aire, según los experimentos del Sr. Fizeau[†] es

[*] *Leipzig Trans*., Vol. V, (1857) p. 260; o *Poggendorff Ann*., Agosto 1856, p. 10.

V = 314.858.000 metros por segundo

De acuerdo con los experimentos más precisos del Sr. Foucault[‡]

V = 298.000.000 metros por segundo

La velocidad de la luz en el espacio que rodea la Tierra, deducida del coeficiente de aberración y el valor aceptado del radio de la órbita de la Tierra, es

V = 308.000.000 metros por segundo

(97) Por lo tanto, la velocidad de la luz deducida del experimento concuerda bastante bien con el valor de v deducido del único conjunto de experimentos que hasta ahora poseemos. El valor de v se determinó midiendo la fuerza electromotriz con la que se cargaba un condensador de capacidad conocida, y luego descargando el condensador a través de un galvanómetro, para medir la cantidad de electricidad en él, en unidades electromagnéticas. En el experimento, el único uso de la luz fue para ver los instrumentos. El valor de V encontrado por el Sr. Foucault se obtuvo al determinar el ángulo a través del cual giraba un espejo giratorio, mientras que la luz reflejada por él iba y regresaba a lo largo de un curso medido. Ningún uso fue hecho con electricidad o magnetismo.

(97) Por lo tanto, la velocidad de la luz deducida del experimento concuerda suficientemente con los resultados experimentales. La concordancia de los resultados parece mostrar que la luz y el magnetismo son características de la misma naturaleza y que la luz es una perturbación electromagnética propagada a través del campo de acuerdo con leyes electromagnéticas.

(98) Volvamos ahora a las ecuaciones de (94), en las cuales aparecen las cantidades J e Ψ, para ver si algún otro tipo de perturbación puede propagarse a través del medio dependiente de estas cantidades que desaparecen de las ecuaciones finales.

Si determinamos χ de la ecuación

$$\nabla^2\chi = \frac{d^2\chi}{dx^2} + \frac{d^2\chi}{dy^2} + \frac{d^2\chi}{dz^2} = J \tag{73}$$

y F', G' H' de las ecuaciones

$$F' = F - \frac{d\chi}{dx}, \quad G' = G - \frac{d\chi}{dy}, \quad H' = H - \frac{d\chi}{dz}, \tag{74}$$

Entonces

† *Comptes Rendus*, Vol. XXIX, (1849), p. 90.
‡ *Ibid.* Vol. LV, (1862), pp. 501, 792.

$$\frac{dF'}{dx}+\frac{dG'}{dy}+\frac{dH'}{dz}=0 \qquad (75)$$

y las ecuaciones de (94) toman la forma

$$k\nabla^2 F'=4\pi\mu\left(\frac{d^2F'}{dt^2}+\frac{d}{dxdt}\left(\Psi+\frac{d\chi}{dt}\right)\right) \qquad (76)$$

derivando las tres ecuaciones respecto de *x, y,* y *z,* y sumando, encontramos que

$$\Psi=-\frac{d\chi}{dt}+\varphi(x,y,z) \qquad (77)$$

y que

$$\left.\begin{aligned} k\nabla^2 F'&=4\pi\mu\frac{d^2F'}{dt^2}\\ k\nabla^2 G'&=4\pi\mu\frac{d^2G'}{dt^2}\\ k\nabla^2 H'&=4\pi\mu\frac{d^2H'}{dt^2}\end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

Por lo tanto, las perturbaciones indicadas por *F'*, *G'*, *H'*se propagan con la velocidad $V=\sqrt{\frac{k}{4\pi\mu}}$ a través del campo; y dado que

$$\frac{dF'}{dx}+\frac{dG'}{dy}+\frac{dH'}{dz}=0$$

la resultante de esas perturbaciones se encuentra en el plano de la onda.

(99) La parte restante de las perturbaciones totales *F, G, H* es la parte que depende de χ, no está sujeta a ninguna condición excepto la expresada en la ecuación

$$\frac{d\Psi}{dt}+\frac{d^2\chi}{dt^2}=0$$

Si, sobre esta ecuación efectuamos la operación ∇^2 se obtiene

$$ke=\frac{dJ}{dt}-k\nabla^2\varphi(x,y,z) \qquad (79)$$

Como el medio es un aislante perfecto, la electricidad libre es inamovible y, por lo tanto, *dJ/dt* es una función de *x, y, z* y el valor de *J* es constante o cero o aumenta uniformemente con el tiempo o disminuye uniformemente con el tiempo, de modo que ninguna perturbación que dependa de J se puede propagar como una onda.

(100) Las ecuaciones del campo electromagnético, deducidas de evidencia puramente experimental, muestran que solo se pueden propagar vibraciones transversales. Si tuviéramos que ir más allá de nuestro conocimiento experimental y asignar una densidad definida a una sustancia que deberíamos llamar "fluido eléctrico", y seleccionar a la electricidad vítrea o a la resinosa como representante de ese fluido, entonces podríamos tener vibraciones normales propagadas con una velocidad dependiendo de esta densidad. Sin embargo, no tenemos evidencia de la densidad de la electricidad, ya que no sabemos si se debe considerar a la electricidad vítrea como una sustancia o como carente de sustancia.

Por lo tanto, la ciencia electromagnética conduce exactamente a las mismas conclusiones que la ciencia óptica con respecto a la dirección de las perturbaciones que pueden propagarse a través del campo; ambos afirman la propagación de vibraciones transversales, y ambos dan la misma velocidad de propagación. Por otro lado, ambas ciencias muestran confusión cuando se les pide afirmar o negar la existencia de vibraciones normales.

Relación entre el índice de refracción y el carácter electromagnético de la sustancia.

(101) De acuerdo con la teoría ondulatoria, la velocidad de la luz en un medio es

$$\frac{1}{i}V_0$$

donde i es el índice de refracción del medio y V_0 es la velocidad de la luz en el vacío. De acuerdo con la Teoría Electromagnética, la velocidad de la propagación de una onda es

$$\sqrt{\frac{k}{4\pi\mu}}$$

donde, de acuerdo con las ecuaciones (49) y (71)

$$k = \frac{1}{D}k_0 \text{ y } k_0 = 4\pi V_0^2$$

Por lo tanto

$$D = \frac{i^2}{\mu} \tag{80}$$

Es decir, la Capacidad Inductiva Específica es igual al cuadrado del índice de refracción dividido por el coeficiente de inducción magnética.

Propagación de perturbaciones electromagnéticas en un medio cristalino.

(102) Calculemos ahora las condiciones de propagación de una onda plana en un medio para el cual los valores de *k* y μ son diferentes en diferentes direcciones. Como no proponemos dar una investigación completa de la cuestión en el presente imperfecto estado de la teoría en lo que se refiere a perturbaciones de corto período, supondremos que los ejes de inducción magnética coinciden en dirección con los de la elasticidad eléctrica.

(103) Sean λ, μ, ν, los valores de los coeficientes magnéticos según los tres ejes. Entonces, las ecuaciones de la fuerza magnética (*B*) toma la forma

$$\left.\begin{aligned}\lambda\alpha &= \frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}\\ \mu\beta &= \frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx}\\ \nu\gamma &= \frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}\end{aligned}\right\} \qquad (81)$$

Las ecuaciones de las corrientes eléctricas (*C*) quedan como antes.

Las ecuaciones de la elasticidad eléctrica (*E*) serán

$$\left.\begin{aligned}P &= 4\pi a^2 f\\ Q &= 4\pi b^2 g\\ R &= 4\pi c^2 h\end{aligned}\right\} \qquad (82)$$

donde $4\pi a^2$, $4\pi b^2$ y $4\pi c^2$, son los valores de *k* para los ejes de *x, y* y *z.*

Combinando estas ecuaciones con (*A*) y (*D*) se obtienen ecuaciones de la forma

$$\frac{1}{\mu\nu}\left(\lambda\frac{d^2F}{dx^2}+\mu\frac{d^2F}{dy^2}+\nu\frac{d^2F}{dz^2}\right)-\frac{1}{\mu\nu}\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dF}{dx}+\mu\frac{dG}{dy}+\nu\frac{dH}{dz}\right)=\frac{1}{a^2}\left(\frac{d^2F}{dt^2}+\frac{d^2\Psi}{dxdt}\right) \qquad (83)$$

(104) Si *l, m, n*, son los cosenos directores de la onda y *V* su velocidad y

$$lx+my+nz-Vt=w \qquad (84)$$

entonces *F, G, H* y Ψ, serán funciones de *w* y si indicamos con *F', G', H'* y Ψ' a las derivadas segundas de esas cantidades respecto de *w*, se obtienen las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\left(V^2 - a^2\left(\frac{m^2}{\nu}+\frac{n^2}{\mu}\right)\right)F'+\frac{a^2lm}{\nu}G'+\frac{a^2\,ln}{\mu}H'-lV\Psi'=0\\ \left(V^2 - b^2\left(\frac{n^2}{\lambda}+\frac{l^2}{\nu}\right)\right)G'+\frac{b^2mn}{\lambda}H'+\frac{b^2ml}{\nu}F'-mV\Psi'=0\\ \left(V^2 - c^2\left(\frac{l^2}{\mu}+\frac{m^2}{\lambda}\right)\right)H'+\frac{c^2nl}{\mu}F'+\frac{c^2nm}{\lambda}G'-nV\Psi'=0\end{aligned}\right\} \quad (85)$$

Si ahora hacemos

$$\left.\begin{aligned}V^4 - V^2\frac{1}{\lambda\mu\nu}\left\{l^2\lambda\left(b^2\mu+c^2\nu\right)+m^2\mu\left(c^2\nu+a^2\lambda\right)+n^2\nu\left(a^2\lambda+b^2\mu\right)\right\}\\ +\frac{a^2b^2c^2}{\lambda\mu\nu}\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\left(l^2\lambda+m^2\mu+n^2\nu\right)=U\right)\end{aligned}\right\} \quad (86)$$

Encontraremos

$$F'V^2U - l\Psi'VU = 0 \quad (87)$$

y ecuaciones similares para G' y H'. Por lo tanto, o

$$V = 0 \quad (88)$$

$$U = 0 \quad (89)$$

o $$VF' = l\Psi', \quad VG' = m\Psi', \quad VH' = n\Psi' \quad (90)$$

La tercera suposición indica que la resultante de F', G', H', se encuentra en la dirección normal al plano de la onda, pero las ecuaciones no nos indican si esta perturbación, siendo posible, pudiera propagarse, ya que no disponemos de otra relación entre Ψ' y F', G', H'.

La solución $V = 0$, se refiere al caso en el cual no hay propagación.

La solución $U = 0$ da dos valores para V^2 que corresponden a los valores de F', G', H', que están dados por la ecuación

$$\frac{l}{a^2}F'+\frac{m}{b^2}G'+\frac{n}{c^2}H'=0 \quad (91)$$

$$\frac{a^2l\lambda}{F'}\left(b^2\mu-c^2\nu\right)+\frac{b^2m\mu}{G'}\left(c^2\nu-a^2\lambda\right)+\frac{c^2n\nu}{H'}\left(a^2\lambda-b^2\mu\right)=0 \quad (92)$$

(105) Las velocidades a lo largo de los ejes son las siguientes:

Dirección de propagación		x	y	z
Direcciones de los desplazamientos eléctricos	x		$\dfrac{a^2}{\nu}$	$\dfrac{a^2}{\mu}$
	y	$\dfrac{b^2}{\nu}$		$\dfrac{b^2}{\lambda}$
	z	$\dfrac{c^2}{\mu}$	$\dfrac{c^2}{\lambda}$	

Ahora sabemos que en cada plano principal de un cristal, el rayo polarizado en ese plano obedece a la ley ordinaria de la refracción y, por lo tanto, su velocidad es la misma en cualquier dirección en que se propague ese plano.

Si la luz polarizada consiste en perturbaciones electromagnéticas en las que el desplazamiento eléctrico se produce en el plano de polarización, entonces

$$a^2 = b^2 = c^2 \qquad (93)$$

Por el contrario, si el desplazamiento es perpendicular al plano de polarización

$$\lambda = \mu = \nu \qquad (94)$$

De los experimentos magnéticos de Faraday, Plücker, etc., sabemos que, en muchos cristales, λ, μ y ν, son diferentes entre sí.

Los experimentos de Kohlrausch[*] sobre inducción eléctrica a través de cristales, parecen mostrar que a, b y c, para un cristal dado, pueden ser diferentes.

Pero las desigualdades entre λ, μ y ν, son tan pequeñas que se requieren grandes fuerzas magnéticas para indicar sus diferencias y esas diferencias no parecen ser de magnitudes suficientes para dar cuenta de la doble refracción de los cristales.

Por otro lado, los experimentos de inducción eléctrica son susceptibles de error debido a pequeños defectos o partes de materia conductora en el cristal.

Se requerirán más experimentos sobre las propiedades magnéticas y dieléctricas de los cristales antes de poder decidir si la relación de estos cuerpos con las fuerzas magnéticas y eléctricas es la misma, ya sea que estas fuerzas son permanentes, como cuando están alternando con la rapidez de las vibraciones de la luz.

[*] *Phil. Mag.* , 1852.

Relación entre la resistencia eléctrica y la transparencia

(106) Si el medio, en lugar de ser un aislante perfecto, es un conductor cuya resistencia por unidad de volumen es ρ, entonces no solo habrá desplazamientos eléctricos, sino también verdaderas corrientes de conducción en las que la energía eléctrica se transformará en calor, y la ondulación se irá debilitando. Para determinar el coeficiente de absorción, investiguemos la propagación a lo largo del eje de *x* de la perturbación transversal *G*.

Por las ecuaciones anteriores

$$\frac{d^2G}{dx^2} = -4\pi\mu(q')$$

$$= -4\pi\mu\left(\frac{df}{dt} + q\right) \text{por } (A)$$

$$\frac{d^2G}{dx^2} = -4\pi\mu\left(\frac{1}{k}\frac{d^2G}{dt^2} - \frac{1}{\rho}\frac{dG}{dt}\right) \text{por } (E) \text{ y } (F) \qquad (95)$$

Si *G* tiene la forma

$$G = e^{-px} \cos(qx + nt) \qquad (96)$$

encontramos que

$$p = \frac{2\pi\mu}{\rho}\frac{n}{q} = \frac{2\pi\mu}{\rho}\frac{V}{i} \qquad (97)$$

donde *V* es la velocidad de la luz en el aire e *i* es el índice de refracción. La proporción de la luz incidente transmitida a través de un espesor *x* es

$$e^{-2px} \qquad (98)$$

Sea *R* la resistencia, en unidades electromagnéticas, de una placa de una sustancia cuyo espesor es *x*, su ancho *b*, y su largo *l*¸ entonces

$$R = \frac{l\zeta}{bx}$$

$$2px = 4\pi\mu\frac{V}{i}\frac{l}{bR} \qquad (99)$$

(107) La mayoría de los cuerpos sólidos transparentes son buenos aislantes, mientras que todos los buenos conductores son muy opacos.

Los electrolitos permiten que una corriente pase fácilmente, pero, a menudo, son muy transparentes. Podemos suponer, sin embargo, que en las vibraciones de la luz que se alternan rápidamente, las fuerzas electromotrices actúan durante un tiempo tan breve que no permite efectuar una separación completa entre las partículas en combinación, de modo que cuando la fuerza se invierte las partículas oscilan en sus posiciones anteriores sin pérdida de energía.

El oro, la plata y el platino son buenos conductores y, sin embargo, cuando se reducen a placas suficientemente delgadas, permiten que la luz pase a través de ellos. Si la resistencia del oro es la misma para las fuerzas electromotrices de corto período que para aquellas con las que hacemos los experimentos, la cantidad de luz que pasa a través de un trozo de hoja de oro, cuya resistencia fue determinada por el Sr. C. Hockin, sería solo 10^{-50} de la luz incidente, una cantidad totalmente imperceptible. Yo encontré que entre 1/500 y 1/1000 de luz verde, pasa a través de una hoja delgada de oro. Gran parte de esta luz se transmite a través de los agujeros y las grietas; no obstante, hay suficiente transmisión a través del oro mismo para darle un tono verde fuerte a la luz transmitida. Este resultado no puede conciliarse con la teoría electromagnética de la luz, a menos que supongamos que hay menos pérdida de energía cuando las fuerzas electromotrices se invierten con la rapidez de las vibraciones de la luz que cuando actúan durante tiempos sensibles, como en nuestros experimentos.

Valores absolutos de las Fuerzas Electromotrices y Magnéticas que intervienen en la Propagación de la Luz.

(108) Si la ecuación de la propagación de la luz es

$$F = A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(z - Vt)$$

la fuerza electromotriz será

$$P = -A\frac{2\pi}{\lambda}V\sin\frac{2\pi}{\lambda}(z - Vt)$$

y la energía por unidad de volumen será

$$W = \frac{P^2}{8\pi\mu V};$$

de modo que

$$P = \sqrt{8\pi\mu VW},$$

donde *V* es la velocidad de la luz y *W* es la energía comunicada por la luz a la unidad de área en un segundo.

De acuerdo con los datos de Pouillet y calculados por el Profesor W. Thomson*, el valor mecánico de la luz solar directa sobre la Tierra es

83,4 libras-pie, por segundo y por pie cuadrado.

Esto da el valor máximo de P de la luz solar directa desde el Sol hasta la Tierra

$$\boldsymbol{P} = \mathbf{60.000.000}$$

o, alrededor de 600 celdas de Daniell por metro.

Sobre la superficie solar, el valor de P sería alrededor de

13.000 celdas de Daniell por metro.

Sobre la Tierra, el valor máximo de la fuerza magnética sería 0.193†,

y sobre la superficie solar sería 4,13.

Estas fuerzas electromotrices y magnéticas deben concebirse como que se invierten dos veces en cada vibración de la luz; es decir, más de mil millones de millones de veces en un segundo.

* *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 1854 ("*Mechanical Energies of the Solar System*").

†La fuerza magnética horizontal en Kew (en el SO de Londres) es de alrededor de 1,76 en unidades métricas.

PARTE VII. CÁLCULOS DE LOS COEFICIENTES DE INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA.

Métodos generales

(109) Como ya ha sido mostrado, las relaciones electromagnéticas entre dos circuitos conductores, *A* y *B*, dependen de una función *M* de sus formas y posiciones relativas.

M puede calcularse de diferentes maneras, lo que por supuesto debe conducir al mismo resultado.

Primer método. *M* es el momentum electromagnético del circuito *B* cuando *A* transporta una corriente unitaria, o

$$M = \int \left(F\frac{dx}{ds'} + G\frac{dy}{ds'} + H\frac{dz}{ds'} \right) ds'$$

donde *F, G, H* son los componentes del momentum electromagnético debido a una corriente unitaria en *A*, y *ds*' es un elemento de la longitud de *B*, y la integración se realiza alo largo de todo el circuito de B.

Para encontrar *F, G, H*, observamos que por (*B*) y (*C*)

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2} = -4\pi\mu\, p'$$

con ecuaciones similares para *G* y *H*, donde *p'*, *q'* y *r'*, son las componente de la corriente en *A*.

Ahora, si sólo consideramos un sólo elemento *ds* de *A*, tendremos

$$p' = \frac{dx}{ds}ds, \qquad q' = \frac{dy}{ds}ds, \qquad q' = \frac{dy}{ds}ds$$

y la solución de las ecuaciones da

$$F = \frac{\mu}{\rho}\frac{dx}{ds}ds, \qquad G = \frac{\mu}{\rho}\frac{dy}{ds}ds, \qquad H = \frac{\mu}{\rho}\frac{dz}{ds}ds$$

donde ρ es la distancia de cualquier punto a *ds*. Luego

$$M = \iint \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz}{ds'}\right) ds ds'$$

$$= \iint \frac{\mu}{\rho} \cos\theta \, ds ds'$$

donde θ es el ángulo entre las direcciones de los dos elementos *ds* y *ds'* y ρ es la distancia entre ellos, y la integración se realiza a lo largo de ambos circuitos.

En este método, nos limitamos a la integración de sólo dos circuitos lineales.

(110) Segundo método. *M* es el número de líneas de fuerza magnética que pasan a través del circuito *B* cuando *A* transporta una corriente unitaria, o

$$M = \sum (\mu\alpha l + \mu\beta m + \mu\gamma n) dS'$$

donde μα, μβ y μγ, son las componentes de la inducción magnética debida a una corriente unitaria en *A*, *S'* es una superficie limitada por la corriente y *l, m* y *n* son los cosenos directores de la normal a la superficie, la integración se extiende sobre la superficie.

Esto lo podemos expresar de la forma

$$M = \mu \sum \frac{1}{\rho^2} \sin\theta \sin\theta' \sin\varphi \, dS' \, ds$$

donde *dS*' es un elemento de la superficie delimitada por *B*, *ds* es un elemento del circuito *A*, ρ es la distancia entre ellos, θ y θ' son los ángulos entre ρ y *ds* y entre ρ y la normal a *dS'* respectivamente, y φ es el ángulo entre los planos en los que se miden θ y θ'. La integración se realiza alrededor del circuito *A* y sobre la superficie delimitada por *B*.

Este método es más conveniente en el caso de circuitos que se encuentran en un plano, en cuyo caso sen θ = 1 y sen φ = l.

111. Tercer método. *M* es esa parte de la energía magnética intrínseca de todo el campo que depende del producto de las corrientes en los dos circuitos, siendo cada corriente unitaria.

Sean α, β, γ los componentes de la intensidad magnética en cualquier punto debido al primer circuito, α', β', γ' lo mismo para el segundo circuito; entonces la energía intrínseca del elemento de volumen *dV* del campo es

$$\frac{\mu}{8\pi}\left[(\alpha+\alpha')^2 + (\beta+\beta')^2 + (\gamma+\gamma')^2\right] dV$$

La parte que depende del producto de las corrientes es

$$\frac{\mu}{4\pi}(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')dV$$

Por lo tanto, si conocemos las intensidades magnéticas *I* e *I'* debidas a la corriente unitaria en cada circuito, podemos obtener *M* integrando

$$\frac{\mu}{4\pi}\sum \mu I\, I' \cos\theta dV$$

sobre todo el espacio, siendo θ el ángulo entre las direcciones de *I* e *I'*.

Aplicación a una bobina

(112) Para encontrar el coeficiente de inducción mutua (*M*) entre dos conductores lineales circulares situados en planos paralelos, en los que la distancia entre las curvas es en todas partes la misma, y pequeña en comparación con el radio de cualquiera de ellos.

Si *r* es la distancia entre las curvas, y *a* el radio de cualquiera de ellas, entonces cuando *r* es muy pequeño en comparación con *a*, por el segundo método encontramos, como primera aproximación,

$$M = 4\pi a\left(ln\frac{8a}{r} - 2\right)$$

Para una mejor aproximación al valor de *M*, sean*a* y a_1 los radios de los círculos, y *b* la distancia entre sus planos; entonces

$$r^2 = (a - a_1)^2 + b^2$$

Para obtener *M* se deben considerar las siguientes condiciones:

1º. *M* debe cumplir la ecuación diferencial

$$\frac{d^2M}{da^2} + \frac{d^2M}{db^2} + \frac{1}{a}\frac{dM}{da} = 0$$

Esta ecuación, que es verdadera para cualquier campo magnético simétrico con respecto al eje común de los círculos, no puede por sí misma conducir a la determinación de *M* como una función de, *a*, a_1 y *b*. Por lo tanto, se debe hacer uso de otras condiciones.

2º. El valor de *M* debe permanecer igual cuando se intercambian *a* y a_1.

3º. Los primeros dos términos de *M* deben ser los mismos que los dados anteriormente.

M puede así expandirse en la siguiente serie:

$$M = 4\pi a \log\frac{8a}{r}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{a-a_1}{a}+\frac{1}{16}\frac{3b^2+(a_1-a)^2}{a^2}-\frac{1}{32}\frac{\left(3b^2+(a-a_1)^2(a-a_1)\right)}{a^3}+etc.\right\}-$$

$$-4\pi a\left\{2+\frac{1}{2}\frac{a-a_1}{a}+\frac{1}{16}\frac{b^2-3(a_1-a)^2}{a^2}-\frac{1}{48}\frac{\left(6b^2-(a-a_1)^2\right)(a-a_1)}{a^3}+etc.\right\}$$

(113) Podemos aplicar este resultado para encontrar el coeficiente de autoinducción (*L*) de una bobina circular de alambre cuya sección es pequeña en comparación con el radio del círculo.

Supongamos que la sección de la bobina sea un rectángulo, donde *c* es el ancho en el plano del círculo, y *b* la profundidad perpendicular a dicho plano.

Sea *a* el radio medio de la bobina y *n* el número de vueltas; entonces, mediante la integración, encontramos

$$L = \frac{n^2}{b^2c^2}\iiiint M(xyx'\,y')\,dx\,dy\,dx'\,dy'$$

donde *M* (*xyx'y'*) representa el valor de *M* para los dos enrollamientos cuyas coordenadas son *xy* y *x'y'* respectivamente; y la integración se realiza primero con respecto a *x* e *y* sobre la sección rectangular, y luego con respecto a *x'* e *y'* en el mismo espacio.

$$L = 4\pi n^2 a\left\{\ln\frac{8a}{r}+\frac{1}{12}-\frac{4}{3}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\cot 2\theta-\frac{\pi}{3}\cos 2\theta-\frac{1}{6}\cot^2\ln\cos\theta-\frac{1}{6}\tan^2\theta\ln\sin\theta\right\}+$$

$$+\frac{\pi n^2 r^2}{24a}\left\{\begin{array}{l}\ln\frac{8a}{r}\left(2\sin^2\theta+1\right)+3{,}45+27{,}475\cos^2\theta-3{,}2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta}+\\ +\frac{1}{5}\frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta}\ln\cos\theta+\frac{13}{3}\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}\ln\sin\theta\end{array}\right\}$$

donde *a* representa al radio medio de la bobina

r es la diagonal de la sección rectangular = $\sqrt{b^2+c^2}$

θ es el ángulo entre *r* y el plano del círculo.

n es el número de enrollamientos.

Los logaritmos son neperianos y los ángulos se expresan en unidades circulares.

En los experimentos realizados por el Comité de la British Association para determinar un estándar de Resistencia Eléctrica, se usó una bobina doble, consistente en dos bobinas de sección rectangular, prácticamente iguales, colocadas paralelas con un pequeño espacio entre ellas.

El valor de L para esta bobina fue encontrado de la siguiente manera:

El valor de L fue calculado aplicando la fórmula precedente en seis casos diferentes, en los cuales las secciones rectangulares consideradas tenía siempre el mismo ancho, mientras que la profundidad fue

$$\boldsymbol{A, B, C, \quad A + B, \quad B + C, \quad A + B + C,}$$

siendo $n = 1$ en cada caso.

Llamando a los resultados

$$L(A), \quad L(B), \quad L(C), \quad \text{etc.},$$

Calculamos los coeficientes de mutua inducción $M(AC)$ de dos bobinas así,

$$\boldsymbol{2CM(AC) = (A + B + C)^2 L(A + B + C) - (A + B)^2 L(A + B) - (B + C)^2 L(B + C) + B^2 L(B)}$$

Entonces, su n_1 es el número de enrollamientos en la bobina A y n_2 el número de enrollamientos en la bobina B, el coeficiente de autoinducción de las dos bobinas en conjunto es

$$\boldsymbol{L = n_1^2 L(A) + 2n_1 n_2 L(AC) + n_2^2 L(B)}$$

(114) Estos valores de L fueron calculados sobre la base de la suposición de que los enrollamientos estaban uniformemente distribuidos de modo de llenar exactamente toda la sección. Sin embargo, este no es el caso ya que el alambre tiene, generalmente, forma circular y cubierto por un material aislante. Luego, la corriente sobre el alambre está más concentradas que lo que estaría si se hubiese distribuido uniformemente sobre la sección (rectangular) y las corrientes en los alambres de las vecindades no actuasen sobre ella exactamente, tal como lo haría una corriente uniforme.

Las correcciones que surgen de estas consideraciones pueden expresarse mediante cantidades numéricas, las que podemos multiplicar por la longitud del alambre, para que tengan los mismos valores cualquiera sea la forma de la bobina.

Sea D, la distancia entre cada alambre y el siguiente, suponiendo que están dispuestos en orden rectangular y sea d el diámetro del alambre. Entonces, la corrección por el diámetro del alambre es

$$\boldsymbol{+2\left(\log\frac{D}{d} + \frac{4}{3}\log 2 + \frac{\pi}{3} - \frac{11}{6}\right)}$$

La corrección para los ocho alambres más próximos es

+ 0,0236

Para los dieciséis de la siguiente ronda es

+ 0,00083

Estas correcciones multiplicadas por la longitud del alambre y adicionadas al resultado anterior, dan el verdadero valor de *L*, considerado como la medida del potencial de la bobina en sí misma, por unidad de corriente en el alambre, cuando esta corriente se ha establecido por un tiempo suficiente, y está distribuida uniformemente a través de la sección del alambre.

(115) Pero al inicio de una corriente y durante su variación, la corriente no es uniforme a través de la sección del alambre, debido a que la acción inductora entre diferentes porciones de la corriente tienden a hacer a la corriente más fuerte en una parte de la sección que en otra. Cuando una fuerza electromotriz uniforme *P* que surge por alguna causa actúa sobre un alambre cilíndrico de resistencia específica ρ, se tiene

$$p\rho = P - \frac{dF}{dt}$$

donde *F* se obtiene a partir de la ecuación

$$\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} = -4\pi\mu p$$

y donde *r* es la distancia al eje del cilindro

Hagamos que un término del valor de *F* sea de la forma Tr^n, donde *T* es una función del tiempo, entonces el término de *p* que lo produce es de la forma

$$-\frac{1}{4\pi\mu}n^2Tr^{n-2}$$

Luego, si se escribe

$$F = T + \frac{\mu\pi}{\rho}\left(-P + \frac{dT}{dt}\right)r^2 + \left(\frac{\mu\pi}{\rho}\right)^2 \frac{1}{1^2\times 2^2}\frac{d^2T}{dt^2}r^4 + etc.$$

$$p\rho = \left(P + \frac{dT}{dt}\right) - \frac{\mu\pi}{\rho}\frac{d^2T}{dt^2} - \left(\frac{\mu\pi}{\rho}\right)^2 \frac{1}{1^2\times 2^2}\frac{d^3T}{dt^3}r^4 - etc.$$

La contracorriente total de la autoinducción en cualquier punto será

$$\int\left(\frac{P}{\rho}-p\right)dt=\frac{1}{\rho}T+\frac{\mu\pi}{\rho^2}\frac{dT}{dt}r^2+\frac{\mu^2\pi^2}{\rho^3}\frac{1}{1^2\times 2^2}\frac{d^2T}{dt^2}r^4+etc.$$

Integrada entre t = 0 y t = ∞.

Cuando $t = 0$ $\quad p = 0 \quad \therefore \left(\frac{dT}{dt}\right)_0 = P\,,\quad \left(\frac{d^2T}{dt^2}\right)_0 = 0,\quad etc.$

Cuando $t = \infty$ $p = \frac{P}{\rho} \therefore \left(\frac{dT}{dt}\right)_\infty = 0\,,\quad \left(\frac{d^2T}{dt^2}\right)_\infty = 0,\quad etc.$

$$\int_0^\infty\int_0^r 2\pi\left(\frac{P}{\rho}-p\right)rdrdt=\frac{1}{\rho}T\pi r^2+\frac{1}{2}\frac{\mu\pi^2}{\rho^2}\frac{dT}{dt}r^4+\frac{\mu^2\pi^3}{\rho^3}\frac{1}{1^2\times 2^2\times 3^2}\frac{d^2T}{dt^2}r^6+etc.$$

Integrada desde t = 0 hasta t =∞

Cuando $t = 0$, $p = 0$ a lo largo de la sección, $\therefore \left(\frac{dT}{dt}\right)_0 = P\,,\left(\frac{d^2T}{dt^2}\right)_0 = 0,\quad etc.$

Cuando $t = \infty$ $p = 0$ " " " " $\therefore \left(\frac{dT}{dt}\right)_\infty = 0\,,\quad \left(\frac{d^2T}{dt^2}\right)_\infty = 0,\quad etc.$

Además, si l es la longitud del alambre y R su resistencia

$$R=\frac{\rho l}{\pi r^2}$$

y si C es la corriente establecida en el alambre, $C = Pl/R$

La contracorriente total puede escribirse

$$\frac{l}{R}\left(T_\infty - T_0\right)-\frac{1}{2}\mu\frac{l}{R}C=-\frac{LC}{R} \text{ por la Sección (35)}$$

Ahora bien, si la corriente en lugar de ser variable desde el centro del cable hasta la circunferencia de la sección exterior, hubiera sido la misma en todas partes, el valor de F habría sido

$$F = T + \mu\gamma\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)$$

donde γ es la corriente en el alambre en cada instante y la contracorriente total sería

$$\int_0^\infty \int_0^r \frac{1}{\rho}\frac{dF}{dt} 2\pi r dr = \frac{l}{R}\left(T_\infty - T_0\right) - \frac{3}{4}\mu\frac{l}{R}C = -\frac{L'C}{R}$$

y

$$L = L' - \frac{1}{4}\mu l$$

o el valor de *L* que se debe usar para calcular la autoinducción de un cable, para corrientes variables, es menor que el que se deduce de la suposición de que la corriente es constante en toda la sección del cable en $^1/_4\mu l$ donde *l* es la longitud del alambre, y μ es el coeficiente de inducción magnética correspondiente a la sustancia del alambre.

(116) Las dimensiones de la bobina utilizada por el Comité de la *British Association*en sus experimentos en King's College en 1864 fueron las siguientes:

	En metros
Radio medio	= *a* = 0,158194
Profundidad de cada bobina	= *b* = 0,01608
Ancho de cada bobina	= *c* = 0,01841
Distancia entre las bobinas	= 0,02010
Número de enrollamientos	*n* = 313
Diámetro del alambre	= 0,00126

El valor de *L* derivado del primer término de la expresión es 437440 metros.

La corrección que depende de que el radio no sea infinitamente grande en comparación con la sección de la bobina que se encuentra en el segundo término es – 7345 metros.

La corrección dependiente del diámetro del alambre (por unidad de longitud) fue	+ 0,44997
La corrección por ocho alambres vecinos	+ 0,0236
La corrección por dieciséis alambres vecinos	+ 0,0008
La corrección por variación de la corriente en diferentes partes de la sección	– 0,2500
Corrección total por unidad de longitud	0,22437
Longitud	311236 *m*
Suma de las correcciones	70 *m*
Valor final de *L* calculado	430165 *m*

Este valor de *L* fue empleado para reducir las observaciones, de acuerdo con el método explicado en el informe del Comité[*]. La corrección dependiente de *L* varía con el cuadrado de la velocidad. El resultado de dieciséis experimentos en los cuales se aplicó esta corrección y en los cuales la velocidad variaba de 100 revoluciones en diecisiete segundos a 100 revoluciones en setenta y siete segundos fueron comparados mediante el método de los cuadrados mínimos para establecer qué otras correcciones dependientes del cuadrado de la velocidad deberían aplicarse para reducir los errores a un mínimo.

[*] British Association Reports, 1863, p. 169.

Los resultados de este ensayo mostró que el valor calculado de *L*, debería multiplicarse por 1,0618 para obtener un valor de *L* que daría los resultados más consistentes.

Por lo tanto, tenemos *L* por cálculos	430165 *metros*
Valor probable de *L* por el método de los cuadrados mínimos	456748 *metros*
Resultado de experimentos con Balanza eléctrica, sección (46)	410000 *metros*

El valor de *L* calculado a partir de las dimensiones de la bobina es probablemente mucho más preciso que cualquiera de las otras determinaciones.

TABLA DE MATERIAS

PARTE I **INTRODUCCIÓN** 283

PARTE II. **SOBRE LA INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA**

Momentum electromagnético de una corriente 292
Acción mutua de dos corrientes 292
Ilustración dinámica del momentum reducido 292
Coeficientes de inducción para dos circuitos 294
Relaciones electromagnéticas entre dos circuitos conductores 295
Inducción de una corriente por otra 295
Inducción por el movimiento del conductor 296
Ecuación del trabajo y la energía 296
Calor producido por la corriente 296
Energía intrínseca de las corrientes 297
Acción mecánica entre conductores 298
Caso de un único circuito 298
Caso de dos circuitos 300
Sobre la Determinación de Coeficientes de Inducción por el Equilibrio Eléctrico 303
Exploración del campo electromagnético 306
Sobre las líneas de fuerza magnéticas 307
Sobre superficies magnéticas equipotenciales 308

PARTE III. **ECUACIONES GENERALES DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO**

Corrientes eléctricas (p, q, r) 309
Desplazamientos eléctricos (f, g, h) 309
Fuerza electromotriz (P, Q, R) 309
Momentum electromagnético (F, G, H) 310
Momentum electromagnético de un circuito 310
Fuerza magnética (α, β, γ) 311
Coeficiente de inducción magnética (μ) 311
Ecuaciones de fuerza magnética 311
Ecuaciones de las corrientes 311
Fuerza electromotriz en un circuito 312
Fuerza electromotriz en un conductor en movimiento 313

Ecuaciones de la Fuerza Electromotriz 314
Elasticidad eléctrica 315
Ecuaciones de elasticidad eléctrica 315
Resistencia eléctrica 315
Ecuaciones de la resistencia eléctrica 315
Cantidad eléctrica 315
Ecuación de la electricidad libre 316
Ecuación de continuidad 316
Energía intrínseca del campo electromagnético 317

PARTE IV. ACCIONES MECÁNICAS EN EL CAMPO

Fuerza mecánica sobre un conductor móvil 320
Fuerza mecánica de un imán 321
Fuerza mecánica sobre un cuerpo electrificado 323
Medición de los fenómenos eléctricos por efectos electrostáticos 324
Nota sobre la atracción gravitatoria 325

PARTE V. TEORÍA DE LOS CONDENSADORES

Capacidad de un condensador 327
Capacidad específica de la inducción eléctrica (*D*) 327
Absorción eléctrica 327

PARTE VI TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA DE LA LUZ 332

Relación entre el índice de refracción y el carácter electromagnético de la sustancia 337
Propagación de perturbaciones electromagnéticas en un medio cristalino 338
Relación entre la resistencia eléctrica y la transparencia 341
Valores absolutos de las Fuerzas Electromotrices y Magnéticas que intervienen en la Propagación de la Luz. 342

PARTE VII. CÁLCULOS DE LOS COEFICIENTES DE INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA.

Métodos generales 344
Aplicación a una bobina 346

[From the Philosophical Magazine, Vol. xxi.]

XXIII. ON PHYSICAL LINES OF FORCE.

PART I.

THE THEORY OF MOLECULAR VORTICES APPLIED TO MAGNETIC PHENOMENA.

In all phenomena involving attractions or repulsions, or any forces depending on the relative position of bodies, we have to determine the magnitude and direction of the force which would act on a given body, if placed in a given position.

In the case of a body acted on by the gravitation of a sphere, this force is inversely as the square of the distance, and in a straight line to the centre of the sphere. In the case of two attracting spheres, or of a body not spherical, the magnitude and direction of the force vary according to more complicated laws. In electric and magnetic phenomena, the magnitude and direction of the resultant force at any point is the main subject of investigation. Suppose that the direction of the force at any point is known, then, if we draw a line so that in every part of its course it coincides in direction with the force at that point, this line may be called a *line of force*, since it indicates the direction of the force in every part of its course.

By drawing a sufficient number of lines of force, we may indicate the direction of the force in every part of the space in which it acts.

Thus if we strew iron filings on paper near a magnet, each filing will be magnetized by induction, and the consecutive filings will unite by their opposite poles, so as to form fibres, and these fibres will indicate the direction of the lines of force. The beautiful illustration of the presence of magnetic force afforded by this experiment, naturally tends to make us think of the lines of force as something real, and as indicating something more than the mere resultant of two forces, whose seat of action is at a distance, and which do not exist there at all until a magnet is placed in that part of the field. We are dissatisfied with the explanation founded on the hypothesis of attractive and repellent forces directed towards the magnetic poles, even though we may have satisfied ourselves that the phenomenon is in strict accordance with that hypothesis, and we cannot help thinking that in every place where we find these lines of force, some physical state or action must exist in sufficient energy to produce the actual phenomena.

My object in this paper is to clear the way for speculation in this direction, by investigating the mechanical results of certain states of tension and motion in a medium, and comparing these with the observed phenomena of magnetism and electricity. By pointing out the mechanical consequences of such hypotheses, I hope to be of some use to those who consider the phenomena as due to the action of a medium, but are in doubt as to the relation of this hypothesis to the experimental laws already established, which have generally been expressed in the language of other hypotheses.

I have in a former paper([*]) endeavoured to lay before the mind of the geometer a clear conception of the relation of the lines of force to the space in which they are traced. By making use of the conception of currents in a fluid, I shewed how to draw lines of force, which should indicate by their number the amount of force, so that each line may be called a unit-line of force (see Faraday's *Researches*, 3122); and I have investigated the path of the lines where they pass from one medium to another.

In the same paper I have found the geometrical significance of the "Electrotonic State," and have shewn how to deduce the mathematical relations between the electrotonic state, magnetism, electric currents, and the electromotive force, using mechanical illustrations to assist the imagination, but not to account for the phenomena.

I propose now to examine magnetic phenomena from a mechanical point of view, and to determine what tensions in, or motions of, a medium are capable of producing the mechanical phenomena observed. If, by the same hypothesis, we can connect the phenomena of magnetic attraction with electromagnetic phenomena and with those of induced currents, we shall have found a theory which, if not true, can only be proved to be erroneous by experiments which will greatly enlarge our knowledge of this part of physics.

The mechanical conditions of a medium under magnetic influence have been variously conceived of, as currents, undulations, or states of displacement or strain, or of pressure or stress.

Currents, issuing from the north pole and entering the south pole of a magnet, or circulating round an electric current, have the advantage of representing correctly the geometrical arrangement of the lines of force, if we could account on mechanical principles for the phenomena of attraction, or for the currents themselves, or explain their continued existence.

Undulations issuing from a centre would, according to the calculations of Professor Challis, produce an effect similar to attraction in the direction of the centre; but admitting this to be true, we know that two series of undulations traversing the same space do not combine into one resultant as two attractions do, but produce an effect depending on relations of phase as well as intensity, and if allowed to proceed, they diverge from each other without any mutual action. In fact the mathematical laws of attractions are not analogous in any respect to those of undulations, while they have remarkable analogies with those of currents, of the conduction of heat and electricity, and of elastic bodies.

[*]See a paper " On Faraday's Lines of Force," Cambridge Philosophical Transactions, Vol. i. Part i.

In the *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* for January 1847, Professor William Thomson has given a "Mechanical Representation of Electric, Magnetic, and Galvanic Forces," by means of the displacements of the particles of an elastic solid in a state of strain. In this representation we must make the angular displacement at every point of the solid proportional to the magnetic force at the corresponding point of the magnetic field, the direction of the axis of rotation of the displacement corresponding to the direction of the magnetic force. The absolute displacement of any particle will then correspond in magnitude and direction to that which I have identified with the electrotonic state; and the relative displacement of any particle, considered with reference to the particle in its immediate neighbourhood, will correspond in magnitude and direction to the quantity of electric current passing through the corresponding point of the magneto-electric field. The author of this method of representation does not attempt to explain the origin of the observed forces by the effects due to these strains in the elastic solid, but makes use of the mathematical analogies of the two problems to assist the imagination in the study of both.

We come now to consider the magnetic influence as existing in the form of some kind of pressure or tension, or, more generally, of stress in the medium.

Stress is action and reaction between the consecutive parts of a body, and consists in general of pressures or tensions different in different directions at the same point of the medium.

The necessary relations among these forces have been investigated by mathematicians; and it has been shewn that the most general type of a stress consists of a combination of three principal pressures or tensions, in directions at right angles to each other.

When two of the principal pressures are equal, the third becomes an axis of symmetry, either of greatest or least pressure, the pressures at right angles to this axis being all equal.

When the three principal pressures are equal, the pressure is equal in every direction, and there results a stress having no determinate axis of direction, of which we have an example in simple hydrostatic pressure.

The general type of a stress is not suitable as a representation of a magnetic force, because a line of magnetic force has direction and intensity, but has no third quality indicating any difference between the sides of the line, which would be analogous to that observed in the case of polarized light(*).

We must therefore represent the magnetic force at a point by a stress having a single axis of greatest or least pressure, and all the pressures at right angles to this axis equal. It may be objected that it is inconsistent to represent a line of force, which is essentially dipolar, by an axis of stress, which is necessarily isotropic; but we know that every phenomenon of action and reaction is isotropic in its results, because the effects of the force on the bodies between which it acts are equal and opposite, while the nature and origin of the force may be dipolar, as in the attraction between a north and a south pole.

---

*See Faraday's *Researches*, 3262.

Let us next consider the mechanical effect of a state of stress symmetrical about an axis. We may resolve it, in all cases, into a simple hydrostatic pressure, combined with a simple pressure or tension along the axis. When the axis is that of greatest pressure, the force along the axis will be a *pressure*. When the axis is that of least pressure, the force along the axis will be a *tension*.

If we observe the lines of force between two magnets, as indicated by iron filings, we shall see that whenever the lines of force pass from one pole to another, there is *attraction* between those poles; and where the lines of force from the poles avoid each other and are dispersed into space, the poles *repel* each other, so that in both cases they are drawn in the direction of the resultant of the lines of force.

It appears therefore that the stress in the axis of a line of magnetic force is a tension, like that of a rope.

If we calculate the lines of force in the neighbourhood of two gravitating bodies, we shall find them the same in direction as those near two magnetic poles of the same name; but we know that the mechanical effect is that of attraction instead of repulsion. The lines of force in this case do not run between the bodies, but avoid each other, and are dispersed over space. In order to produce the effect of attraction, the stress along the lines of gravitating force must be a pressure.

Let us now suppose that the phenomena of magnetism depend on the existence of a tension in the direction of the lines of force, combined with ahydrostatic pressure; or in other words, a pressure greater in the equatorial than in the axial direction: the next question is, what mechanical explanation can we give of this inequality of pressures in a fluid or mobile medium ? The explanation which most readily occurs to the mind is that the excess of pressure in the equatorial direction arises from the centrifugal force of vortices or eddies in the medium having their axes in directions parallel to the lines of force.

This explanation of the cause of the inequality of pressures at once suggests the means of representing the dipolar character of the line of force. Every vortex is essentially dipolar, the two extremities of its axis being distinguished by the direction of its revolution as observed from those points.

We also know that when electricity circulates in a conductor, it produces lines of magnetic force passing through the circuit, the direction of the lines depending on the direction of the circulation. Let us suppose that the direction of revolution of our vortices is that in which vitreous electricity must revolve in order to produce lines of force whose direction within the circuit is the same as that of the given lines of force.

We shall suppose at present that all the vortices in any one part of the field are revolving in the same direction about axes nearly parallel, but that in passing from one part of the field to another, the direction of the axes, the velocity of rotation, and the density of the substance of the vortices are subject to change. We shall investigate the resultant mechanical effect upon an element of the medium, and from the mathematical expression of this resultant we shall deduce the physical character of its different component parts.

Prop. I. — If in two fluid systems geometrically similar the velocities and densities at corresponding points are proportional, then the differences of pressure at corresponding points due to the motion will vary in the duplicate ratio of the velocities and the simple ratio of the densities.

Let l be the ratio of the linear dimensions, m that of the velocities, n that of the densities, and p that of the pressures due to the motion. Then the ratio of the masses of corresponding portions will be l^3n, and the ratio of the velocities acquired in traversing similar parts of the systems will be m; so that l^3mn is the ratio of the momenta acquired by similar portions in traversing similar parts of their paths.

The ratio of the surfaces is l^2, that of the forces acting on them is l^2p, and that of the times during which they act is l/m; so that the ratio of the impulse of the forces is l^3p/m, and we have now

$$l^3mn = \frac{l^3p}{m},$$

$$m^2n = p;$$

that is, the ratio of the pressures due to the motion (p) is compounded of the ratio of the densities (n) and the duplicate ratio of the velocities {m^2), and does not depend on the linear dimensions of the moving systems.

In a circular vortex, revolving with uniform angular velocity, if the pressure at the axis is p_0, that at the circumference will be $p_1 = p_0 + {}^1/_2\rho v^2$ where ρ is the density and v the velocity at the circumference. The *mean pressure* parallel to the axis will be

$$p_0 + \frac{1}{4}\rho v^2 = p_2$$

If a number of such vortices were placed together side by side with their axes parallel, they would form a medium in which there would be a pressure $p_2$parallel to the axes, and a pressure p_1 in any perpendicular direction. If the vortices are circular, and have uniform angular velocity and density throughout, then

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{4}\rho v^2,$$

If the vortices are not circular, and if the angular velocity and the density are not uniform, but vary according to the same law for all the vortices,

$$p_1 - p_2 = C\rho v^2,$$

whereρ is the mean density, and C is a numerical quantity depending on the distribution of angular velocity and density in the vortex. In future we shall write $\mu/4\pi$ instead of C_p, so that

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{4\pi}\mu v^2 \qquad (1)$$

whereμ is a quantity bearing a constant ratio to the density, and v is the linear velocity at the circumference of each vortex.

A medium of this kind, filled with molecular vortices having their axes parallel, differs from an ordinary fluid in having different pressures in different directions. If not prevented by properly arranged pressures, it would tend to expand laterally. In so doing, it would allow the diameter of each vortex to expand and its velocity to diminish in the same proportion. In order that a medium having these inequalities of pressure in different directions should be in equilibrium, certain conditions must be fulfilled, which we must investigate.

Prop. II. — If the direction-cosines of the axes of the vortices with respect to the axes of x, y, and z be l, m, and n, to find the normal and tangential stresses on the co-ordinate planes.

The actual stress may be resolved into a simple hydrostatic pressure p_1 acting in all directions, and a simple tension $p_1 - p_2$, or $^1/_{4\pi}\,\mu v^2$, acting along the axis of stress.

Hence if p_{xx}, p_{yy}, and p_{zz} be the normal stresses parallel to the three axes, considered positive when they tend to increase those axes ; and if p_{yz}, p_{zx}, andp_{xy}be the tangential stresses in the three co-ordinate planes, considered positive when they tend to increase simultaneously the symbols subscribed, then by the resolution of stresses(*),

$$p_{xx} = \frac{1}{4\pi}\mu v^2 l^2 - p_1 \ ,$$

$$p_{xx} = \frac{1}{4\pi}\mu v^2 m^2 - p_1 \ ,$$

$$p_{xx} = \frac{1}{4\pi}\mu v^2 n^2 - p_1 \ ,$$

$$p_{yz} = \frac{1}{4\pi}\mu v^2 mn \ ,$$

$$p_{zx} = \frac{1}{4\pi}\mu v^2 nl \ ,$$

$$p_{xy} = \frac{1}{4\pi}\mu v^2 lm \ .$$

*Rankine's *Applied Mechanics*, Art. 106.

If we write $\alpha = vl$, $\beta = vm$ y $\gamma = vn$, then

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= \frac{1}{4\pi}\mu\alpha^2 - p_1, \quad p_{yz} = \frac{1}{4\pi}\mu\beta\gamma \\ p_{yy} &= \frac{1}{4\pi}\mu\beta^2 - p_1, \quad p_{zx} = \frac{1}{4\pi}\mu\gamma\alpha \\ p_{zz} &= \frac{1}{4\pi}\mu\gamma^2 - p_1, \quad p_{yz} = \frac{1}{4\pi}\mu\alpha\beta \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Prop. III. — To find the resultant force on an element of the medium, arising from the variation of internal stress.

We have in general, for the force in the direction of *x* per unit of volume by the law of equilibrium of stresses(*),

$$\mathrm{X} = \frac{d}{dx}p_{xx} + \frac{d}{dy}p_{yy} + \frac{d}{dz}p_{zz} \tag{3}$$

In this case the expression may be written

$$\mathrm{X} = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{d(\mu\alpha)}{dx}\alpha + \mu\alpha\frac{d\alpha}{dx} - 4\pi\frac{dp_1}{dx} + \frac{d(\mu\beta)}{dy}\alpha + \mu\beta\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d(\mu\gamma)}{dz}\alpha + \mu\gamma\frac{d\alpha}{dz}\right\} \tag{4}$$

Remembering that $\alpha\frac{d\alpha}{dx} + \beta\frac{d\beta}{dx} + \gamma\frac{d\gamma}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)$, this becomes

$$\begin{aligned} \mathrm{X} = \alpha\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{d(\mu\alpha)}{dx} + \frac{d(\mu\beta)}{dy} + \frac{d(\mu\gamma)}{dz}\right\} + \frac{1}{8\pi}\mu\frac{d}{dx}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right) - \\ - \mu\beta\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right) + \mu\gamma\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{dy}{dx}\right) - \frac{dp_1}{dx} \end{aligned} \tag{5}$$

The expressions for the forces parallel to the axes of *y* and *z* may be written down from analogy.

We have now to interpret the meaning of each term of this expression.

We suppose α, β, γ to be the components of the force which would act upon that end of a unit magnetic bar which points to the north.

μ represents the magnetic inductive capacity of the medium at any point referred to air as a standard, $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$ represent the quantity of magnetic induction through unit of area perpendicular to the three axes of *x*, *y*, *z* respectively.

---

[*] Rankine's *Applied Mechanics*, Art. 116.

The total amount of magnetic induction through a closed surface surrounding the pole of a magnet, depends entirely on the strength of that pole; so that if *dxdydz* be an element, then

$$\left(\frac{d}{dx}\mu\alpha+\frac{d}{dy}\mu\beta+\frac{d}{dz}\mu\gamma\right)dx\,dy\,dz=4\pi m\,dx\,dy\,dz \quad (6)$$

which represents the total amount of magnetic induction outwards through the surface of the element *dxdydz*, represents the amount of "imaginary magnetic matter" within the element, of the kind which points north.

The first term of the value of X, therefore,

$$\alpha\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d}{dx}\mu\alpha+\frac{d}{dy}\mu\beta+\frac{d}{dz}\mu\gamma\right) \quad (7)$$

may be written

$$\alpha m \quad (8)$$

where a is the intensity of the magnetic force, and m is the amount of magnetic matter pointing north in unit of volume.

The physical interpretation of this term is, that the force urging a north pole in the positive direction of *x*; is the product of the intensity of the magnetic force resolved in that direction, and the strength of the north pole of the magnet.

Let the parallel lines from left to right in fig. 1 represent a field of magnetic force such as that of the earth, *sn* being the direction from south to north. The vortices, according to our hypothesis, will be in the direction shewn by the arrows in fig. 3, that is, in a plane perpendicular to the lines of force, and revolving in the direction of the hands of a watch when observed from s looking towards *n*. The parts of the vortices above the plane of the paper will be moving towards *e*, and the parts below that plane towards *w*.

We shall always mark by an arrow-head the direction in which we must look in order to see the vortices rotating in the direction of the hands of a watch. The arrow-head will then indicate the *northward* direction in the magnetic field, that is, the direction in which that end of a magnet which points to the north would set itself in the field.

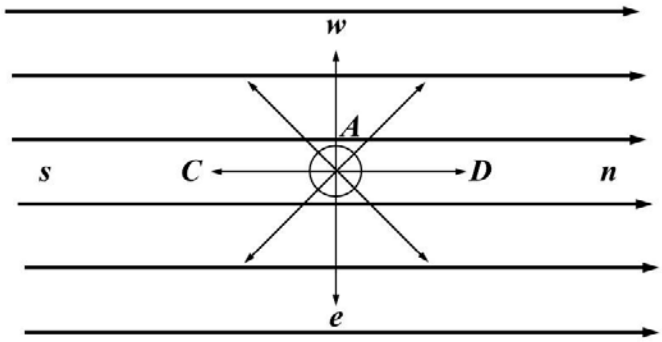


Fig. 1.

Now let *A*be the end of a magnet which points north. Since it repels the north ends of other magnets, the lines of force will be directed from *A* outwards in all directions. On the north side the line *AD* will be in the same direction with the lines of the magnetic field, and the velocity of the vortices will be increased. On the south side the line *AC* will be in the opposite direction, and the velocity of the vortices will be diminished, so that the lines of force are more powerful on the north side of *A* than on the south side.

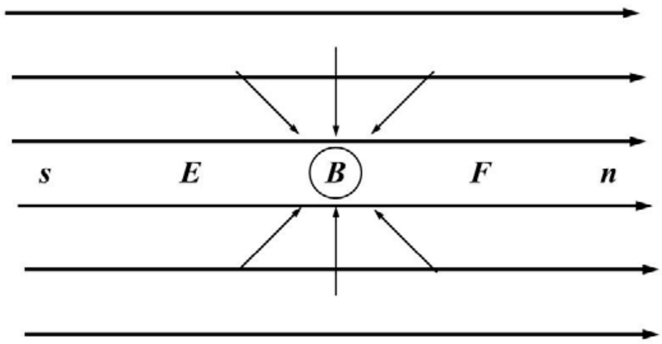


Fig. 2.

We have seen that the mechanical effect of the vortices is to produce a tension along their axes, so that the resultant effect on *A* will be to pull it more powerfully towards *D* than towards *C*; that is, *A* will tend to move to the north.

Let *B* in fig. 2 represent a south pole. The lines of force belonging to *B* will tend towards *B*, and we shall find that the lines of force are rendered stronger towards *E* than towards *F*, so that the effect in this case is to urge *B* towards the south.

It appears therefore that, on the hypothesis of molecular vortices, our first term gives a mechanical explanation of the force acting on a north or south pole in the magnetic field.

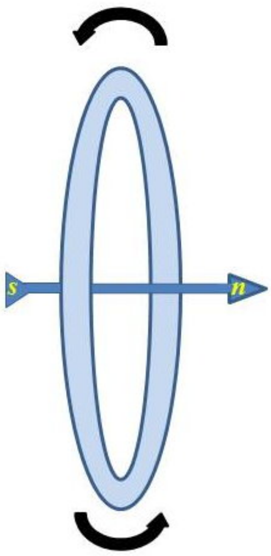


Fig. 3

We now proceed to examine the second term,

$$\frac{1}{8\pi}\mu\frac{d}{dx}\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right).$$

Here $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$is the square of the intensity at any part of the field, and μ, is the magnetic inductive capacity at the same place. Any body therefore placed in the field will be urged *towards places of stronger magnetic intensity* with a force depending partly on its own capacity for magnetic induction, and partly on the rate at which the square of the intensity increases.

If the body be placed in a fluid medium, then the medium, as well as the body, will be urged towards places of greater intensity, so that its hydrostatic pressure will be increased in that direction. The resultant effect on a body placed in the medium will be the *difference* of the actions on the body and on the portion of the medium which it displaces, so that the body will tend to or from places of greatest magnetic intensity, according as it has a greater or less capacity for magnetic induction than the surrounding medium.

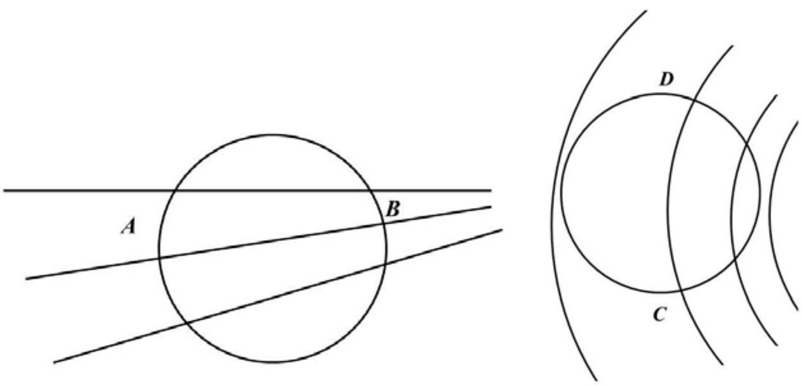


Fig. 4.Fig. 5.

In Fig. 4 the lines of force are represented as covering and becoming more powerful towards the right, so that the magnetic tension at *B* is stronger than at *A*, and the body *AB* will be urged to the right. If the capacity for magnetic induction is greater in the body than in the surrounding medium, it will move to the right, but if less it will move to the left.

We may suppose in this case that the lines of force are converging to a magnetic pole, either north or south, on the right hand.

In Fig. 5 the lines of force are represented as vertical, and becoming more numerous towards the right. It may be shewn that if the force increases towards the right, the lines of force will be curved towards the right. The effect of the magnetic tensions will then be to draw any body towards the right with a force depending on the excess of its inductive capacity over that of the surrounding medium.

We may suppose that in this figure the lines of force are those surrounding an electric current perpendicular to the plane of the paper and on the right hand of the figure.

These two illustrations will shew the mechanical effect on a paramagnetic or diamagnetic body placed in a field of varying magnetic force, whether the increase of force takes place along the lines or transverse to them. The form of the second term of our equation indicates the general law, which is quite independent of the direction of the lines of force, and depends solely on the manner in which the force varies from one part of the field to another.

"We come now to the third term of the value of X,

$$-\mu\beta\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right).$$

Here $\mu\beta$ is, as before, the quantity of magnetic induction through unit of area perpendicular to the axis of *y*, and $\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}$ is a quantity which would disappear if $\alpha dx + \beta dy + \gamma dz$ were a complete differential, that is, if the force acting on a unit north pole were subject to the condition that no work can be done upon the pole in passing round any closed curve. The quantity represents the work done on a north pole in travelling round unit of area in the direction from $+x$ to $+y$ parallel to the plane of *xy*. Now if an electric current whose strength is *r* is traversing the axis of *z*, which, we may suppose, points vertically upwards, then, if the axis of *x* is east and that of *y* north, a unit north pole will be urged round the axis of *z* in the direction from *x* to *y*, so that in one revolution the work done will be $= 4\pi r$. Hence $\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)$ represents the *strength of an electric current parallel toz* through unit of area; and if we write

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}\right)=p, \qquad \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}\right)=q, \qquad \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)=r\ . \tag{9}$$

then*p, q, r* will be the quantity of electric current per unit of area perpendicular to the axes of *x*, *y*, and *z* respectively.

The physical interpretation of the third term of X, $-\mu\beta r$, is that if $\mu\beta$ is the quantity of magnetic induction parallel to *y*, and *r* the quantity of electricity flowing in the direction of *z*, the element will be urged in the direction of $-x$, transversely to the direction of the current and of the lines of force; that is, an *ascending* current in a field of force magnetized towards the *north* would tend to move *west*.

To illustrate the action of the molecular vortices, let *sn* be the direction of magnetic force in the field, and let *C* be the section of an ascending magnetic current perpendicular to the paper. The lines of force due to this current will be circles drawn in the opposite direction from that of the hands of a watch; that is, in the direction *nwse*. At *e* the lines of force will be the sum of those of the field and of the current, and at *w* they will be the difference of the two sets of lines; so that the vortices on the east side of the current will be more powerful than those on the west side. Both sets of vortices have their equatorial parts turned towards *C*, so that they tend to expand towards C, but those on the east side have the greatest effect, so that the resultant effect on the current is to urge it towards the *west*.

The fourth term,

$$\mu\gamma\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}\right),\ \text{or}\ \mu\gamma q \tag{10}$$

may be interpreted in the same way, and indicates that a current *q* in the direction of *y*, that is, to the north, placed in a magnetic field in which the lines are vertically upwards in the direction of *z*, will be urged towards the *east*.

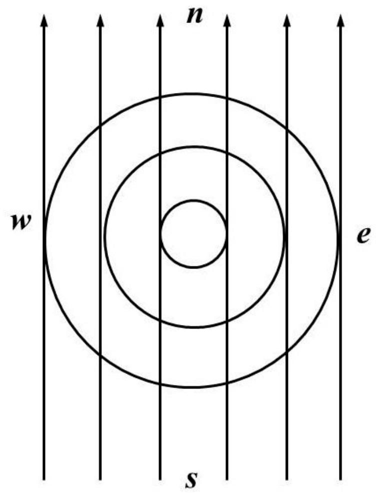


Fig. 6.

The fifth term,

$$-\frac{dp_1}{dx} \tag{11}$$

merely implies that the element will be urged in the direction in which the hydrostatic pressure p_1 diminishes.

We may now write down the expressions for the components of the resultant force on an element of the medium per unit of volume, thus:

$$X = \alpha m + \frac{1}{8\pi}\mu\frac{d}{dx}\left(v^2\right) - \mu\beta r + \mu\gamma q - \frac{dp_1}{dx} \tag{12}$$

$$Y = \beta m + \frac{1}{8\pi}\mu\frac{d}{dy}\left(v^2\right) - \mu\gamma p + \mu\alpha r - \frac{dp_1}{dy} \tag{13}$$

$$Z = \gamma m + \frac{1}{8\pi}\mu\frac{d}{dz}\left(v^2\right) - \mu\alpha q + \mu\beta p - \frac{dp_1}{dz} \tag{14}$$

The first term of each expression refers to the force acting on magnetic poles.

The second term to the action on bodies capable of magnetism by induction.

The third and fourth terms to the force acting on electric currents.

And the fifth to the effect of simple pressure.

Before going further in the general investigation, we shall consider equations (12, 13, 14), in particular cases, corresponding to those simplified cases of the actual phenomena which we seek to obtain in order to determine their laws by experiment.

We have found that the quantities p, q, and r represent the resolved parts of an electric current in the three co-ordinate directions. Let us suppose in the first instance that there is no electric current, or that p, q, and r vanish. We have then by (9),

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 0, \qquad \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 0, \qquad \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 0. \tag{15}$$

whence we learn that

$$\mathbf{a}dx + \beta dy + \gamma dz = d\phi \tag{16}$$

is an exact differential of ϕ, so that

$$\alpha = \frac{d\phi}{dx}, \quad \beta = \frac{d\phi}{dy}, \quad \gamma = \frac{d\phi}{dz}. \tag{17}$$

μ is proportional to the density of the vortices, and represents the "capacity for magnetic induction" in the medium. It is equal to 1 in air, or in whatever medium the experiments were made which determined the powers of the magnets, the strengths of the electric currents, &c.

Let us suppose μ constant, then

$$m=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{d}{dx}(\mu\alpha)+\frac{d}{dy}(\mu\beta)+\frac{d}{dz}(\mu\gamma)\right\}=\frac{1}{4\pi}\mu\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}+\frac{d^2\phi}{dy^2}+\frac{d^2\phi}{dz^2}\right) \tag{18}$$

represents the amount of imaginary magnetic matter in unit of volume. That there may be no resultant force on that unit of volume arising from the action represented by the first term of equations (12, 13, 14), we must have $m = 0$, or

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+\frac{d^2\phi}{dy^2}+\frac{d^2\phi}{dz^2}=0\,. \tag{19}$$

Now it may be shewn that equation (19), if true within a given space, implies that the forces acting within that space are such as would result from a distribution of centres of force beyond that space, attracting or repelling inversely as the square of the distance.

Hence the lines of force in a part of space where μ is uniform, and where there are no electric currents, must be such as would result from the theory of "imaginary matter" acting at a distance. The assumptions of that theory are unlike those of ours, but the results are identical.

Let us first take the case of a single magnetic pole, that is, one end of a long magnet, so long that its other end is too far off to have a perceptible influence on the part of the field we are considering. The conditions then are, that equation (18) must be fulfilled at the magnetic pole, and (19) everywhere else. The only solution under these conditions is

$$\phi=-\frac{m}{\mu}\frac{1}{r}\,. \tag{20}$$

where$r$ is the distance from the pole, and m the strength of the pole. The repulsion at any point on a unit pole of the same kind is

$$\frac{d\phi}{dr}=\frac{m}{\mu}\frac{1}{r^2}\,. \tag{21}$$

In the standard medium $\mu = 1$; so that the repulsion is simply m/r^2 in that medium, as has been shewn by Coulomb.

In a medium having a greater value of μ (such as oxygen, solutions of salts of iron, &c.) the attraction, on our theory, ought to be less than in air, and in diamagnetic media (such as water, melted bismuth, &c.) the attraction between the same magnetic poles ought to be *greater* than in air.

The experiments necessary to demonstrate the difference of attraction of two magnets according to the magnetic or diamagnetic character of the medium in which they are placed, would require great precision, on account of the limited range of magnetic capacity in the fluid media known to us, and the small amount of the difference sought for as compared with the whole attraction.

Let us next take the case of an electric current whose quantity is *C*, flowing through a cylindrical conductor whose radius is *R*, and whose length is infinite as compared with the size of the field of force considered.

Let the axis of the cylinder be that of *z*, and the direction of the current positive, then within the conductor the quantity of current per unit of area is

$$r = \frac{C}{\pi R^2} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right) \qquad (22)$$

so that within the conductor

$$\alpha = -2\frac{C}{R^2}y, \qquad \beta = 2\frac{C}{R^2}x, \qquad \gamma = 0. \qquad (23)$$

Beyond the conductor, in the space round it,

$$\phi = 2C \tan^{-1}\frac{y}{x}, \qquad (24)$$

$$\alpha = \frac{d\phi}{dx} = -2C\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \alpha = \frac{d\phi}{dy} = 2C\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \gamma = \frac{d\phi}{dz} = 0 \qquad , \qquad (25)$$

If $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ is the perpendicular distance of any point from the axis of the conductor, a unit north pole will experience a force = $2C/\rho$, tending to move it round the conductor in the direction of the hands of a watch, if the observer view it in the direction of the current.

Let us now consider a current running parallel to the axis of *z* in the plane of *xz* at a distance ρ. Let the quantity of the current be *c'*, and let the length of the part considered be *l*, and its section *s*, so that *c'*/*s* is its strength per unit of section. Putting this quantity for p in equations (12, 13, 14), we find

$$X = -\mu\beta\frac{c'}{s}$$

per unit of volume; and multiplying by *ls*, the volume of the conductor considered, we find

$$X = -\mu\beta c' l$$

$$= -2\mu\beta \frac{Cc'l}{\rho}. \tag{26}$$

shewing that the second conductor will be attracted towards the first with a force inversely as the distance.

We find in this case also that the amount of attraction depends on the value of μ, but that it varies directly instead of inversely as μ; so that the attraction between two conducting wires will be greater in oxygen than in air, and greater in air than in water.

We shall next consider the nature of electric currents and electromotive forces in connexion with the theory of molecular vortices.

PART II.

THE THEORY OF MOLECULAR VORTICES APPLIED TO ELECTRIC CURRENTS

We have already shewn that all the forces acting between magnets, substances capable of magnetic induction, and electric currents, may be mechanically accounted for on the supposition that the surrounding medium is put into such a state that at every point the pressures are different in different directions, the direction of least pressure being that of the observed lines of force, and the difference of greatest and least pressures being proportional to the square of the intensity of the force at that point.

Such a state of stress, if assumed to exist in the medium, and to be arranged according to the known laws regulating lines of force, will act upon the magnets, currents, &c. in the field with precisely the same resultant forces as those calculated on the ordinary hypothesis of direct action at a distance. This is true independently of any particular theory as to the cause of this state of stress, or the mode in which it can be sustained in the medium. We have therefore a satisfactory answer to the question, "Is there any mechanical hypothesis as to the condition of the medium indicated by lines of force, by which the observed resultant forces may be accounted for?" The answer is, the lines of force indicate the direction of *minimum pressure* at every point of the medium.

The second question must be, "What is the mechanical cause of this difference of pressure in different directions?" We have supposed, in the first part of this paper, that this difference of pressures is caused by molecular vortices, having their axes parallel to the lines of force.

We also assumed, perfectly arbitrarily, that the direction of these vortices is such that, on looking along a line of force from south to north, we should see the vortices revolving in the direction of the hands of a watch.

We found that the velocity of the circumference of each vortex must be proportional to the intensity of the magnetic force, and that the density of the substance of the vortex must be proportional to the capacity of the medium for magnetic induction.

We have as yet given no answers to the questions, " How are these vortices set in rotation?" and "Why are they arranged according to the known laws of lines of force about magnets and currents?" These questions are certainly of a higher order of difficulty than either of the former; and I wish to separate the suggestions I may offer by way of provisional answer to them, from the mechanical deductions which resolved the first question, and the hypothesis of vortices which gave a probable answer to the second.

We have, in fact, now come to inquire into the physical connexion of these vortices with electric currents, while we are still in doubt as to the nature of electricity, whether it is one substance, two substances, or not a substance at all, or in what way it differs from matter, and how it is connected with it.

We know that the lines of force are affected by electric currents, and we know the distribution of those lines about a current; so that from the force we can determine the amount of the current. Assuming that our explanation of the lines of force by molecular vortices is correct, why does a particular distribution of vortices indicate an electric current? A satisfactory answer to this question would lead us a long way towards that of a very important one, "What is an electric current?"

I have found great difficulty in conceiving of the existence of vortices in a medium, side by side, revolving in the same direction about parallel axes. The contiguous portions of consecutive vortices must be moving in opposite directions; and it is difficult to understand how the motion of one part of the medium can coexist with, and even produce, an opposite motion of a part in contact with it.

We know that the lines of force are affected by electric currents, and we know the distribution of those lines about a current; so that from the force we can determine the amount of the current. Assuming that our explanation of the lines of force by molecular vortices is correct, why does a particular distribution of vortices indicated an electric current? A satisfactory answer to this question would lead us a long way towards that of a very important one, "What is an electric current?

I have found great difficulty in conceiving of the existence of vortices in a medium, side by side, revolving in the same direction about parallel axes. The contiguous portions of consecutive vortices must be moving in opposite directions; and it is difficult to understand how the motion of one part of the medium can coexist with, and even produce, an opposite motion of a part in contact with it.

The only conception which has at all aided me in conceiving of this kind of motion is that of the vortices being separated by a layer of particles, revolving each on its own axis in the opposite direction to that of the vortices, so that the contiguous surfaces of the particles and of the vortices have the same motion.

In mechanism, when two wheels are intended to revolve in the same direction, a wheel is placed between them so as to be in gear with both, and this wheel is called an "idle wheel." The hypothesis about the vortices which I have to suggest is that a layer of particles, acting as idle wheels, is interposed between each vortex and the next, so that each vortex has a tendency to make the neighbouring vortices revolve in the same direction with itself.

In mechanism, the idle wheel is generally made to rotate about a *fixed axle*; but in epicyclic trains and other contrivances, as, for instance, in Siemens's governor for steam-engines ([*]), we find idle wheels whose centres are capable of motion. In all these cases the motion of the centre is the half sum of the motions of the circumferences of the wheels between which it is placed. Let us examine the relations which must subsist between the motions of our vortices and those of the layer of particles interposed as idle wheels between them.

[*] See Goodeve's*Elements of Mechanism*, p. 118.

Prop. IV. — To determine the motion of a layer of particles separating two vortices.

Let the circumferential velocity of a vortex, multiplied by the three direction-cosines of its axis respectively, be α, β, γ, as in Prop. II. Let l, m, n be the direction- cosines of the normal to any part of the surface of this vortex, the outside of the surface being regarded positive. Then the components of the velocity of the particles of the vortex at this part of its surface will be

$$n\beta - m\gamma \text{ parallel to } x$$

$$l\gamma - n\alpha \text{ parallel to } y,$$

$$m\alpha - l\beta \text{ parallel to } z.$$

If this portion of the surface be in contact with another vortex whose velocities are α', β', γ', then a layer of very small particles placed between them will have a velocity which will be the mean of the superficial velocities of the vortices which they separate, so that if u is the velocity of the particles in the direction of x,

$$u = \frac{1}{2}m(\gamma' - \gamma) - \frac{1}{2}n(\beta' - \beta). \tag{27}$$

since the normal to the second vortex is in the opposite direction to that of the first.

Prop. V. — To determine the whole amount of particles transferred across unit of area in the direction of x in unit of time.

Let x_1, y_1, z_1 be the co-ordinates of the centre of the first vortex, x_2, y_2, z_2, those of the second, and so on. Let V_1, V_2, &c. be the volumes of the first, second, &c. vortices, and $\overline{V}$ the sum of their volumes. Let dS be an element of the surface separating the first and second vortices, and x, y, z its co-ordinates. Let ρ be the quantity of particles on every unit of surface. Then if p be the whole quantity of particles transferred across unit of area in unit of time in the direction of x, the whole momentum parallel to x of the particles within the space whose volume is $\overline{V}$ will be $\overline{V}p$, and we shall have

$$\overline{V}p = \sum u\rho dS \tag{28}$$

the summation being extended to every surface separating any two vortices within the volume $\overline{V}$.

Let us consider the surface separating the first and second vortices. Let an element of this surface be dS, and let its direction-cosines be l_1, m_1, n_1 with respect to the first vortex, and l_2, m_2, n_2, with respect to the second; then we know that

$$l_1 + l_2 = 0, \quad m_1 + m_2 = 0, \quad n_1 + n_2 = 0. \tag{29}$$

The values of α, β, γ vary with the position of the centre of the vortex; so that we may write

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{d\alpha}{dx}(x_2 - x_1) + \frac{d\alpha}{dy}(y_2 - y_1) + \frac{d\alpha}{dz}(z_2 - z_1). \tag{30}$$

with similar equations for β and γ.

The value of u may be written: —

$$u = \frac{1}{2}\frac{d\gamma}{dx}\{m_1(x - x_1) + m_2(x - x_2)\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{d\gamma}{dy}\{m_1(y - y_1) + m_2(y - y_2)\} + \frac{1}{2}\frac{d\gamma}{dz}\{m_1(z - z_1) + m_2(z - z_2)\} -$$

$$- \frac{1}{2}\frac{d\beta}{dx}\{n_1(x - x_1) + n_2(x - x_2)\} + \frac{1}{2}\frac{d\beta}{dy}\{n_1(y - y_1) + n_2(y - y_2)\} -$$

$$- \frac{1}{2}\frac{d\beta}{dz}\{n_1(z - z_1) + n_2(z - z_2)\} \tag{31}$$

In effecting the summation of $\Sigma u\rho dS$, we must remember that round any closed surface ΣldS and all similar terms vanish; also that terms of the form $\Sigma lydS$, where *l* and *y* are measured in different directions, also vanish; but that terms of the form $\Sigma lxdS$, where *l* and *x* refer to the same axis of co-ordinates, do not vanish, but are equal to the volume enclosed by the surface. The result is

$$\overline{V}p = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right)(V_1 + V_2 + \&c.) \tag{32}$$

or dividing by $\overline{V} = V_1 + V_2$ +&c.,

$$p = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right) \tag{33}$$

If we make

$$\rho = \frac{1}{2\pi}. \tag{34}$$

then equation (33) will be identical with the first of equations (9), which give the relation between the quantity of an electric current and the intensity of the lines of force surrounding it.

It appears therefore that, according to our hypothesis, an electric current is represented by the transference of the moveable particles interposed between the neighbouring vortices. We may conceive that these particles are very small compared with the size of a vortex, and that the mass of all the particles together is inappreciable compared with that of the vortices, and that a great many vortices, with their surrounding particles, are contained in a single complete molecule of the medium. The particles must be conceived to roll without sliding between the vortices which they separate, and not to touch each other, so that, as long as they remain within the same complete molecule, there is no loss of energy by resistance. When, however, there is a general transference of particles in one direction, they must pass from one molecule to another, and in doing so, may experience resistance, so as to waste electrical energy and generate heat.

Now let us suppose the vortices arranged in a medium in any arbitrary manner. The quantities $\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}$ &c. will then in general have values, so that there will at first be electrical currents in the medium. These will be opposed by the electrical resistance of the medium; so that, unless they are kept up by a continuous supply of force, they will quickly disappear, and we shall then have $\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}=0$, &c.; that is, $\alpha dx + \beta dy + \gamma dz$ will be a complete differential (see equations (15) and (16)); so that our hypothesis accounts for the distribution of the lines of force.

In Plate VIII. p. 488, fig. 1, let the vertical circle *EE* represent an electric current flowing from copper *C* to zinc *Z* through the conductor *EE'*, as shewn by the arrows.

Let the horizontal circle *MM'* represent a line of magnetic force embracing the electric circuit, the north and south directions being indicated by the lines *SN* and *NS*.

Let the vertical circles *V* and *V'* represent the molecular vortices of which the line of magnetic force is the axis. *V* revolves as the hands of a watch, and *V'* the opposite way.

It will appear from this diagram, that if *V* and *V'* were contiguous vortices, particles placed between them would move downwards; and that if the particles were forced downwards by any cause, they would make the vortices revolve as in the figure. We have thus obtained a point of view from which we may regard the relation of an electric current to its lines of force as analogous to the relation of a toothed wheel or rack to wheels which it drives.

In the first part of the paper we investigated the relations of the statical forces of the system. We have now considered the connexion of the motions of the parts considered as a system of mechanism. It remains that we should investigate the dynamics of the system, and determine the forces necessary to produce given changes in the motions of the different parts.

Prop. VI. — To determine the actual energy of a portion of a medium due to the motion of the vortices within it.

Let α, β, γ be the components of the circumferential velocity, as in Prop. II., then the actual energy of the vortices in unit of volume will be proportional to the density and to the square of the velocity. As we do not know the distribution of density and velocity in each vortex, w e cannot determine the numerical value of the energy directly; but since μ also bears a constant though unknown ratio to the mean density, let us assume that the energy in unit of volume is

$$E = C\mu\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

where C is a constant to be determined.

Let us take the case in which

$$\alpha = \frac{d\phi}{dx}, \beta = \frac{d\phi}{dy}, \gamma = \frac{d\phi}{dz}. \tag{35}$$

Let $$\phi = \phi_1 + \phi_2, \tag{36}$$

and let $$\frac{\mu}{4\pi}\left(\frac{d^2\phi_1}{dx^2} + \frac{d^2\phi_1}{dy^2} + \frac{d^2\phi_1}{dz^2}\right) = m_1 \text{ and } \frac{\mu}{4\pi}\left(\frac{d^2\phi_2}{dx^2} + \frac{d^2\phi_2}{dy^2} + \frac{d^2\phi_2}{dz^2}\right) = m_2; \tag{37}$$

then ϕ_1 is the potential at any point due to the magnetic system m_1, and ϕ_2, that due to the distribution of magnetism represented by m_2. The actual energy of all the vortices is

$$E = \sum C\mu\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)dV \tag{38}$$

the integration being performed over all space.

This may be shewn by integration by parts (see Green's "Essay on Electricity," p. 10) to be equal to

$$E = 4\pi C \sum C\mu\left(\phi_1 m_1 + \phi_2 m_2 + \phi_1 m_2 + \phi_2 m_1\right)dV. \tag{39}$$

Or since it has been proved (Green's "Essay" p. 10) that

$$\sum \phi_1 m_2 dV = \sum \phi_2 m_1 dV,$$

$$E = -4\pi C\left(\phi_1 m_1 + \phi_2 m_2 + 2\phi_1 m_2\right)dV. \tag{40}$$

Now let the magnetic system m_1 remain at rest, and let m_2, be moved parallel to itself in the direction of x through a space δx; then, since ϕ_1 depends on m_1 only, it will remain as before, so that $\phi_1 m_1$ will be constant; and since ϕ_2 depends on m_2, only, the distribution of ϕ_2, about m_2 will remain the same, so that $\phi_2 m_2$ will be the same as before the change. The only part of E that will be altered is that depending on 2 $\phi_1 m_2$, because ϕ_1 becomes $\phi_1 + d\,\phi_1/dx$on account of the displacement. The variation of actual energy due to the displacement is therefore

$$\delta E = -4\pi C \sum \left(2\frac{d\phi_1}{dx} m_2 dV \right) \delta x \qquad (41)$$

But by equation (12) the work done by the mechanical forces on m_2 during the motion is

$$\delta W = \sum \left(2\frac{d\phi_1}{dx} m_2 dV \right) \delta x \,. \qquad (42)$$

and since our hypothesis is a purely mechanical one, we must have by the conservation of force,

$\delta E + \delta W = 0$ (43)

that is, the loss of energy of the vortices must be made up by work done in moving magnets, so that

$$-4\pi C \sum \left(2\frac{d\phi_1}{dx} m_2 dV \right) \delta x + \sum \left(2\frac{d\phi_1}{dx} m_2 dV \right) \delta x = 0 \,,$$

$$C = \frac{1}{8\pi} \qquad (44)$$

so that the energy of the vortices in unit of volume is

$$\frac{1}{8\pi}\mu\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right) \qquad (45)$$

and that of a vortex whose volume is V is

$$\frac{1}{8\pi}\mu\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)V \qquad (46)$$

In order to produce or destroy this energy, work must be expended on, or received from, the vortex, either by the tangential action of the layer of particles in contact with it, or by change of form in the vortex. We shall first investigate the tangential action between the vortices and the layer of particles in contact with them.

Prop. VII. — To find the energy spent upon a vortex in unit of time by the layer of particles which surrounds it.

Let P, Q, R be the forces acting on unity of the particles in the three co-ordinate directions, these quantities being functions of x, y, and z. Since each particle touches two vortices at the extremities of a diameter, the reaction of the particle on the vortices will be equally divided, and will be

$$-\frac{1}{2}P\,, \qquad -\frac{1}{2}Q\,, \qquad -\frac{1}{2}R\,.$$

on each vortex for unity of the particles; but since the superficial density of the particles is $1/2\pi$ (see equation (34)), the forces on unit of surface of a vortex will be

$$-\frac{1}{4\pi}P, \qquad -\frac{1}{4\pi}Q, \qquad -\frac{1}{4\pi}R.$$

Now let *dS* be an element of the surface of a vortex. Let the direction-cosines of the normal be *l*, *m*, *n*. Let the co-ordinates of the element be *x*, *y*, *z*. Let the component velocities of the surface be *u*, *v*, *w*. Then the work expended on that element of surface will be

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{4\pi}(Pu + Qv + Rw)dS \tag{47}$$

Let us begin with the first term, *PudS*. *P* may be written

$$P_0 + \frac{dP}{dx}x + \frac{dP}{dy}dy + \frac{dP}{dz}z \tag{48}$$

and $$u = n\beta - m\gamma.$$

Remembering that the surface of the vortex is a closed one, so that

$$\sum nxdS = \sum mxdS = \sum mydS = \sum mzdS = 0,$$

and $$\sum nydS = \sum nzdS = V,$$

we find $$\sum PudS = \left(\frac{dP}{dz}\beta - \frac{dP}{dy}\gamma\right)V \tag{49}$$

and the whole work done on the vortex in unit of time will be

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{4\pi}\sum(Pu + Qv + Rw)dS$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{\alpha\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + \beta\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + \left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right)\right\}V \tag{50}$$

Prop. VIII. — To find the relations between the alterations of motion of the vortices, and the forces *P*, *Q*, *R* which they exert on the layer of particles between them.

Let *V* be the volume of a vortex, then by (46) its energy is

$$E = \frac{1}{8\pi}\mu\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)V \tag{51}$$

and

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{4\pi}\mu V\left(\alpha\frac{d\alpha}{dt} + \beta\frac{d\beta}{dt} + \gamma\frac{d\gamma}{dt}\right)V \tag{52}$$

Comparing this value with that given in equation (50), we find

$$\alpha\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} - \mu\frac{d\alpha}{dt}\right) + \beta\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} - \mu\frac{d\beta}{dt}\right) + \gamma\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} - \mu\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0. \tag{53}$$

This equation being true for all values of α, β, and γ, first let β and γ vanish, and divide by α. We find

$$\left.\begin{aligned} \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} &= \mu\frac{d\alpha}{dt} \\ \frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} &= \mu\frac{d\beta}{dt} \\ \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} &= \mu\frac{d\gamma}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

From these equations we may determine the relation between the alterations of motion $d\alpha/dt$, &c. and the forces exerted on the layers of particles between the vortices, or, in the language of our hypothesis, the relation between changes in the state of the magnetic field and the electromotive forces thereby brought into play.

In a memoir "On the Dynamical Theory of Diffraction" (*Cambridge Philosophical Transactions*, Vol. ix. Part 1, section 6), Professor Stokes has given a method by which we may solve equations (54), and find P, Q and R in terms of the quantities on the right hand of those equations. I have pointed out* the application of this method to questions in electricity and magnetism.

Let us then find three quantities F, G, H from the equations

$$\left.\begin{aligned} \frac{dG}{dz} - \frac{dH}{dy} &= \mu\alpha \\ \frac{dH}{dx} - \frac{dF}{dz} &= \mu\beta \\ \frac{dF}{dy} - \frac{dG}{dx} &= \mu\gamma \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

**Cambridge Philosophical Transactions*, Vol. X. Part I. Art. 3. "On Faraday's Lines of Force," pp. 205—209 of this vol.

with the conditions $$\frac{1}{4\pi}\mu V\left(\frac{d}{dx}\mu\alpha+\frac{d}{dy}\mu\beta+\frac{d}{dz}\mu\gamma\right)=m=0\,, \qquad (56)$$

and $$\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}=0\,. \qquad (57)$$

Differentiating (55) with respect to t, and comparing with (54), we find

$$P=\frac{dF}{dt}\,,\qquad Q=\frac{dG}{dt}\,,\qquad R=\frac{dH}{dt}\,, \qquad (58)$$

We have thus determined three quantities, *F, G, H*, from which we can find P, Q, and R by considering these latter quantities as the rates at which the former ones vary. In the paper already referred to, I have given reasons for considering the quantities *F, G, H* as the resolved parts of that which Faraday has conjectured to exist, and has called the *electrotonic state*. In that paper I have stated the mathematical relations between this electrotonic state and the lines of magnetic force as expressed in equations (55), and also between the electrotonic state and electromotive force as expressed in equations (58). We must now endeavour to interpret them from a mechanical point of view in connexion with our hypothesis.

We shall in the first place examine the process by which the lines of force are produced by an electric current.

Let *AB*, Plate VIII. , p. 488, fig. 2, represent a current of electricity in the direction from *A* to *B*. Let the large spaces above and below *AB* represent the vortices, and let the small circles separating the vortices represent the layers of particles placed between them, which in our hypothesis represent electricity.

Now let an electric current from left to right commence in *AB*. The row of vortices *gh* above *AB* will be set in motion in the opposite direction to that of a watch. (We shall call this direction +, and that of a watch –.) We shall suppose the row of vortices *kl* still at rest, then the layer of particles between these rows will be acted on by the row *gh* on their lower sides, and will be at rest above. If they are free to move, they will rotate in the negative direction, and will at the same time move from right to left, or in the opposite direction from the current, and do form an *induced* electric current.

If this current is checked by the electrical resistance of the medium, the rotating particles will act upon the row of vortices *kl*, and make them revolve in the positive direction till they arrive at such a velocity that the motion of the particles is reduced to that of rotation, and the induced current disappears. If, now, the primary current *AB* be stopped, the vortices in the row *gh* will be checked, while those of the row *kl* still continue in rapid motion. The momentum of the vortices beyond the layer of particles *pq* will tend to move them from left to right, that is, in the direction of the primary current; but if this motion is resisted by the medium, the motion of the vortices beyond *pq* will be gradually destroyed.

It appears therefore that the phenomena of induced currents are part of the process of communicating the rotatory velocity of the vortices from one part of the field to another.

As an example of the action of the vortices in producing induced currents, let us take the following case :— Let B, Plate VIII, p. 488, fig. 3, be a circular ring, of uniform section, lapped uniformly with covered wire. It may be shewn that if an electric current is passed through this wire, a magnet placed within the coil of wire will be strongly affected, but no magnetic effect will be produced on any external point. The effect will be that of a magnet bent round till its two poles are in contact.

If the coil is properly made, no effect on a magnet placed outside it can be discovered, whether the current is kept constant or made to vary in strength; but if a conducting wire *C* be made to *embrace* the ring any number of times, an electromotive force will act on that wire whenever the current in the coil is made to vary; and if the circuit be *closed*, there will be an actual current in the wire C.

This experiment shews that, in order to produce the electromotive force, it is not necessary that the conducting wire should be placed in a field of magnetic force, or that lines of magnetic force should pass through the substance of the wire or near it. All that is required is that lines of force should pass through the circuit of the conductor, and that these lines of force should vary in quantity during the experiment.

In this case the vortices, of which we suppose the lines of magnetic force to consist, are all within the hollow of the ring, and outside the ring all is at rest. If there is no conducting circuit embracing the ring, then, when the primary current is made or broken, there is no action outside the ring, except an instantaneous pressure between the particles and the vortices which they separate. If there is a continuous conducting circuit embracing the ring, then, when the primary current is made, there will be a current in the opposite direction through *C*; and when it is broken, there will be a current through *C* in the same direction as the primary current.

We may now perceive that induced currents are produced when the electricity yields to the electromotive force, — this force, however, still existingwhen the formation of a sensible current is prevented by the resistance of the circuit.

The electromotive force, of which the components are *P, Q, R*, arises from the action between the vortices and the interposed particles, when the velocity of rotation is altered in any part of the field. It corresponds to the pressure on the axle of a wheel in a machine when the velocity of the driving wheel is increased or diminished.

The electrotonic state, whose components are *F, G, H*, is what the electromotive force would be if the currents, &c. to which the lines of force are due, instead of arriving at their actual state by degrees, had started instantaneously from rest with their actual values. It corresponds to the impulse which would act on the axle of a wheel in a machine if the actual velocity were suddenly given to the driving wheel, the machine being previously at rest.

If the machine were suddenly stopped by stopping the driving wheel, each wheel would receive an impulse equal and opposite to that which it received when the machine was set in motion.

This impulse may be calculated for any part of a system of mechanism, and may be called the *reduced momentum* of the machine for that point. In the varied motion of the machine, the actual force on any part arising from the variation of motion may be found by differentiating the reduced momentum with respect to the time, just as we have found that the electromotive force may be deduced from the electrotonic state by the same process.

Having found the relation between the velocities of the vortices and the electromotive forces when the centres of the vortices are at rest, we must extend our theory to the case of a fluid medium containing vortices, and subject to all the varieties of fluid motion. If we fix our attention on any one elementary portion of a fluid, we shall find that it not only travels from one place to another, but also changes its form and position, so as to be elongated in certain directions and compressed in others, and at the same time (in the most general case) turned round by a displacement of rotation.

These changes of form and position produce changes in the velocity of the molecular vortices, which we must now examine.

The alteration of form and position may always be reduced to three simple extensions or compressions in the direction of three rectangular axes, together with three angular rotations about any set of three axes. We shall first consider the effect of three simple extensions or compressions.

Prop. IX. — To find the variations of α, β, γ in the parallelepiped x, y, z when x becomes $x\delta x$; y, $y + \delta y$; and z, $z + \delta z$; the volume of the figure remaining the same.

By Prop. II. we find for the work done by the vortices against pressure,

$$\delta W = p_1\delta(xyz) - \frac{\mu}{4\pi}\left(\alpha^2 yz\delta x + \beta^2 zx\delta y + \gamma^2 xy\delta z\right). \tag{59}$$

and by Prop. VI. we find for the variation of energy,

$$\delta W = \frac{\mu}{4\pi}\left(\alpha\delta x + \beta\delta\beta + \gamma\delta\gamma\right)xyz. \tag{60}$$

The sum $\delta W+\delta E$ must be zero by the conservation of energy, and $\delta(xyz) = 0$, since xyz is constant; so that

$$\alpha\left(\delta\alpha - \alpha\frac{\delta x}{x}\right) + \beta\left(\delta\beta - \beta\frac{\delta y}{y}\right) + \gamma\left(\delta\gamma - \gamma\frac{\delta z}{z}\right) = 0. \tag{61}$$

In order that this should be true independently of any relations between α, β, and γ, we must have

$$\delta\alpha = \alpha\frac{\delta x}{x}, \qquad \delta\beta = \beta\frac{\delta y}{y}, \qquad \delta\gamma = \gamma\frac{\delta z}{z}. \tag{62}$$

Prop. X. — To find the variations of α, β, γ due to a rotation θ_1 about the axis of *x* from *y* to *z*, a rotation θ_2 about the axis of *y* from *z* to *x*, and a rotation θ_3 about the axis of *z* from *x* to *y*.

The axis of β will move away from the axis of *x* by an angle θ_3; so that β resolved in the direction of *x* changes from 0 to $-\beta\theta_3$.

The axis of γ approaches that of *x* by an angle θ_2; so that the resolved part of γ in direction *x* changes from 0 to $\gamma\theta_2$.

The resolved part of α in the direction of *x* changes by a quantity depending on the second power of the rotations, which may be neglected. The variations of α, β, γ from this cause are therefore

$$\delta\alpha = \gamma\theta_2 - \beta\theta_3, \qquad \delta\beta = \alpha\theta_3 - \gamma\theta_1, \qquad \delta\gamma = \beta\theta_1 - \alpha\theta_2. \tag{63}$$

The most general expressions for the distortion of an element produced by the displacement of its different parts depend on the nine quantities

$$\frac{d}{dx}\delta x, \quad \frac{d}{dy}\delta x, \quad \frac{d}{dz}\delta x, \quad \frac{d}{dx}\delta y, \quad \frac{d}{dy}\delta y, \quad \frac{d}{dz}\delta y, \quad \frac{d}{dx}\delta z, \quad \frac{d}{dy}\delta z, \quad \frac{d}{dz}\delta z;$$

and these may always be expressed in terms of nine other quantities, namely, three simple extensions or compressions,

$$\frac{\delta x'}{x'}, \quad \frac{\delta y'}{y'}, \quad \frac{\delta z'}{z'}$$

along three axes properly chosen, x', y', z', the nine direction-cosines of these axes with their six connecting equations, which are equivalent to three independent quantities, and the three rotations θ_1, θ_2, θ_3 about the axes of *x, y, z*.

Let the direction-cosines of x' with respect to *x, y, z* be l_1, m_1, n_1, those of y' l_2, m_2, n_2, and those of z', l_3, m_3, n_3; then we find

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\delta x &= l_1^2\frac{\delta x'}{x'} + l_2^2\frac{\delta y'}{y'} + l_3^2\frac{\delta z'}{z'} \\
\frac{d}{dy}\delta x &= l_1 m_1\frac{\delta x'}{x'} + l_2 m_2\frac{\delta y'}{y'} + l_3 m_3\frac{\delta z'}{z'} - \theta_3 \\
\frac{d}{dz}\delta x &= l_1 n_1\frac{\delta x'}{x'} + l_2 n_2\frac{\delta y'}{y'} + l_3 n_3\frac{\delta z'}{z'} + \theta_2
\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

with similar equations for quantities involving δy and δz.

Let α', β', γ' be the values of α, β, γ referred to the axes x', y', z'; then

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma \\ \beta' &= l_2\alpha + m_2\beta + n_2\gamma \\ \gamma' &= l_3\alpha + m_3\beta + n_3\gamma \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

We shall then have $$\delta\alpha = l_1\delta\alpha' + l_2\delta\beta' + l_3\delta\gamma' + \gamma\theta_3 - \beta\theta_3 \tag{66}$$

$$= l_1\alpha'\frac{\delta x'}{x'} + l_2\beta'\frac{\delta y'}{y'} + l_3\gamma'\frac{\delta z'}{z'} + \gamma\theta_2 - \beta\theta_3 \tag{67}$$

By substituting the values of α', β', γ', and comparing with equations (64), we find

$$\delta\alpha = \alpha\frac{d}{dx}\delta x + \beta\frac{d}{dy}\delta x + \gamma\frac{d}{dz}\delta x\,, \tag{68}$$

as the variation of α due to the change of form and position of the element. The variations of β and γ have similar expressions.

Prop. XI.— To find the electromotive forces in a moving body.

The variation of the velocity of the vortices in a moving element is due totwo causes— the action of the electromotive forces, and the change of form and position of the element. The whole variation of a is therefore

$$\delta\alpha = \frac{1}{\mu}\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right)\delta t + \alpha\frac{d}{dx}\delta x + \beta\frac{d}{dy}\delta x + \gamma\frac{d}{dz}\delta x \tag{69}$$

But since α is a function of x, y. z and t, the variation of a may be also written

$$\delta\alpha = \frac{d\alpha}{dx}\delta x + \frac{d\alpha}{dy}\delta y + \frac{d\alpha}{dz}\delta z + \frac{d\alpha}{dt}\delta t\,, \tag{70}$$

Equating the two values of $\delta\alpha$ and dividing by δt, and remembering that in the motion of an incompressible medium

$$\frac{d}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{d}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{d}{dz}\frac{dz}{dt} = 0 \tag{71}$$

and that in the absence of free magnetism

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0, \tag{72}$$

we find

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}\right)+\gamma\frac{d}{dz}\frac{dx}{dt}-\alpha\frac{d}{dz}\frac{dz}{dt}+\beta\frac{d}{dy}\frac{dx}{dt}+$$

$$+\frac{d\gamma}{dz}\frac{dx}{dt}-\frac{d\alpha}{dz}\frac{dz}{dt}-\frac{d\alpha}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{d\beta}{dy}\frac{dx}{dt}-\frac{d\alpha}{dt}=0. \tag{73}$$

Putting
$$\alpha=\frac{1}{\mu}\left(\frac{dG}{dz}-\frac{dH}{dy}\right) \tag{74}$$

and
$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{d^2G}{dzdt}-\frac{d^2H}{dydt}\right) \tag{75}$$

where*F*, *G*, and *H* are the values of the electrotonic components for a fixed point of space, our equation becomes

$$\frac{d}{dz}\left(Q+\mu\gamma\frac{dx}{dt}-\mu\alpha\frac{dz}{dt}-\frac{dG}{dt}\right)-\frac{d}{dy}\left(R+\mu\alpha\frac{dy}{dt}-\mu\beta\frac{dx}{dt}-\frac{dH}{dt}\right)=0 \tag{76}$$

$$\frac{d}{dz}\left(Q+\mu\gamma\frac{dx}{dt}-\mu\alpha\frac{dz}{dt}-\frac{dG}{dt}\right)-\frac{d}{dy}\left(R+\mu\alpha\frac{dy}{dt}-\mu\beta\frac{dx}{dt}-\frac{dH}{dt}\right)=0$$

The expressions for the variations of β and γ give us two other equations which may be written down from symmetry. The complete solution of the three equations is

$$\left.\begin{aligned}P&=\mu\gamma\frac{dy}{dt}-\mu\beta\frac{dz}{dt}+\frac{dF}{dt}-\frac{d\Psi}{dx}\\ Q&=\mu\alpha\frac{dz}{dt}-\mu\gamma\frac{dx}{dt}+\frac{dG}{dt}-\frac{d\Psi}{dy}\\ R&=\mu\beta\frac{dx}{dt}-\mu\alpha\frac{dy}{dt}+\frac{dH}{dt}-\frac{d\Psi}{dz}\end{aligned}\right\} \tag{77}$$

The first and second terms of each equation indicate the effect of the motion of any body in the magnetic field, the third term refers to changes in the electrotonic state produced by alterations of position or intensity of magnets or currents in the field, and Ψ is a function of *x*, *y*, *z*, and *t*, which is indeterminate as far as regards the solution of the original equations, but which may always be determined in any given case from the circumstances of the problem. The physical interpretation of Ψis, that it is the *electric tension* at each point of space.

The physical meaning of the terms in the expression for the electromotive force depending on the motion of the body, may be made simpler by supposing the field of magnetic force uniformly magnetized with intensity a in the direction of the axis of *x*. Then if *l, m, n* be the direction-cosines of any portion of a linear conductor, and *S* its length, the electromotive force resolved in the direction of the conductor will be

$$e = S(Pl + Qm + Rn) \tag{78}$$

$$e = S\mu\alpha\left(m\frac{dz}{dt} - n\frac{dy}{dt}\right) \tag{79}$$

that is, the product of $\mu\alpha$, the quantity of magnetic induction over unit of area multiplied by $S\left(m\frac{dz}{dt} - n\frac{dy}{dt}\right)$ the area swept out by the conductor *S* in unit of time, resolved perpendicular to the direction of the magnetic force.

The electromotive force in any part of a conductor due to its motion is therefore measured by the *number* of lines of magnetic force which it crosses in unit of time; and the total electromotive force in a closed conductor is measured by the change of the number of lines of force which pass through it; and this is true whether the change be produced by the motion of the conductor or by any external cause.

In order to understand the mechanism by which the motion of a conductor across lines of magnetic force generates an electromotive force in that conductor, we must remember that in Prop. X. we have proved that the change of form of a portion of the medium containing vortices produces a change of the velocity of those vortices; and in particular that an extension of the medium in the direction of the axes of the vortices, combined with a contraction in all directions perpendicular to this, produces an increase of velocity of the vortices; while a shortening of the axis and bulging of the sides produces a diminution of the velocity of the vortices.

This change of the velocity of the vortices arises from the internal effects of change of form, and is independent of that produced by external electromotive forces. If, therefore, the change of velocity be prevented or checked, electromotive forces will arise, because each vortex will press on the surrounding particles in the direction in which it tends to alter its motion.

Let *A*, fig. 4, p. 488, represent the section of a vertical wire moving in the direction of the arrow from west to east, across a system of lines of magnetic force running north and south. The curved lines in fig. 4 represent the lines of fluid motion about the wire, the wire being regarded as stationary, and the fluid as having a motion relative to it. It is evident that, from this figure, we can trace the variations of form of an element of the fluid, as the form of the element depends, not on the absolute motion of the whole system, but on the relative motion of its parts.

In front of the wire, that is, on its east side, it will be seen that as the wire approaches each portion of the medium, that portion is more and more compressed in the direction from east to west, and extended in the direction from north to south; and since the axes of the vortices lie in the north and south direction, their velocity will continually tend to increase by Prop. X., unless prevented or checked by electromotive forces acting on the circumference of each vortex.

We shall consider an electromotive force as positive when the vortices tend to move the interjacent particles upwards perpendicularly to the plane of the paper.

The vortices appear to revolve as the hands of a watch when we look at them from south to north ; so that each vortex moves upwards on its west side, and downwards on its east side. In front of the wire, therefore, where each vortex is striving to increase its velocity, the electromotive force upwards must be greater on its west than on Its east side. There will therefore be a continual increase of upward electromotive force from the remote east, where it is zero, to the front of the moving wire, where the upward force will be strongest.

Behind the wire a different action takes place. As the wire moves away from each successive portion of the medium, that portion is extended from east to west, and compressed from north to south, so as to tend to diminish the velocity of the vortices, and therefore to make the upward electromotive force greater on the east than on the west side of each vortex. The upward electromotive force will therefore increase continually from the remote west, where it is zero, to the back of the moving wire, where it will be strongest.

It appears, therefore, that a vertical wire moving eastwards will experience an electromotive force tending to produce in it an upward current. If there is no conducting circuit in connexion with the ends of the wire, no current will be formed, and the magnetic forces will not be altered; but if such a circuit exists, there will be a current, and the lines of magnetic force and the velocity of the vortices will be altered from their state previous to the motion of the wire. The change in the lines of force is shewn in fig. 5. The vortices in front of the wire, instead of merely producing pressures, actually increase in velocity, while those behind have their velocity diminished, and those at the sides of the wire have the direction of their axes altered; so that the final effect is to produce a force acting on the wire as a resistance to its motion. We may now recapitulate the assumptions we have made, and the results we have obtained.

(1) Magneto-electric phenomena are due to the existence of matter under certain conditions of motion or of pressure in every part of the magnetic field, and not to direct action at a distance between the magnets or currents. The substance producing these effects may be a certain part of ordinary matter, or it may be an æther associated with matter. Its density is greatest in iron, and least in diamagnetic substances; but it must be in all cases, except that of iron, very rare, since no other substance has a large ratio of magnetic capacity to what we call a vacuum.

(2) The condition of any part of the field, through which lines of magnetic force pass, is one of unequal pressure in different directions, the direction of the lines of force being that of least pressure, so that the lines of force may be considered lines of tension.

(3) This inequality of pressure is produced by the existence in the medium of vortices or eddies, having their axes in the direction of the lines of force, and having their direction of rotation determined by that of the lines of force.

We have supposed that the direction was that of a watch to a spectator looking from south to north. We might with equal propriety have chosen the reverse direction, as far as known facts are concerned, by supposing resinous electricity instead of vitreous to be positive. The effect of these vortices depends on their density, and on their velocity at the circumference, and is independent of their diameter. The density must be proportional to the capacity of the substance for magnetic induction, that of the vortices in air being 1. The velocity must be very great, in order to produce so powerful effects in so rare a medium.

The size of the vortices is indeterminate, but is probably very small as compared with that of a complete molecule of ordinary matter(*).

(4) The vortices are separated from each other by a single layer of round particles, so that a system of cells is formed, the partitions being these layers of particles, and the substance of each cell being capable of rotating as a vortex.

(5) The particles forming the layer are in *rolling contact* with both the vortices which they separate, but do not rub against each other. They are perfectly free to roll between the vortices and so to change their place, provided they keep within one *complete molecule* of the substance; but in passing from one molecule to another they experience resistance, and generate irregular motions, which constitute heat. These particles, in our theory, play the part of electricity. Their motion of translation constitutes an electric current, their rotation serves to transmit the motion of the vortices from one part of the field to another, and the tangential pressures thus called into play constitute electromotive force. The conception of a particle having its motion connected with that of a vortex by perfect rolling contact may appear somewhat awkward. I do not bring it forward as a mode of connexion existing in nature, or even as that which I would willingly assent to as an electrical hypothesis. It is, however, a mode of connexion which is mechanically conceivable, and easily investigated, and it serves to bring out the actual mechanical connexions between the known electro-magnetic phenomena; so that I venture to say that any one who understands the provisional and temporary character of this hypothesis, will find himself rather helped than hindered by it in his search after the true interpretation of the phenomena.

The action between the vortices and the layers of particles is in part tangential; so that if there were any slipping or differential motion between the parts in contact, there would be a loss of the energy belonging to the lines of force, and a gradual transformation of that energy into heat. Now we know that the lines of force about a magnet are maintained for an indefinite time without any expenditure of energy; so that we must conclude that wherever there is tangential action between different parts of the medium, there is no motion of slipping between those parts. We must therefore conceive that the vortices and particles roll together without slipping; and that the interior strata of each vortex receive their proper velocities from the exterior stratum without slipping, that is, the angular velocity must be the same throughout each vortex.

---

* The angular momentum of the system of vortices depends on their average diameter; so that if the diameter were sensible, we might expect that a magnet would behave as if it contained a revolving body within it, and that the existence of this rotation might be detected by experiments on the free rotation of a magnet. I have made experiments to investigate this question, but have not yet fully tried the apparatus.

The only process in which electro-magnetic energy is lost and transformed into heat, is in the passage of electricity from one molecule to another. In all other cases the energy of the vortices can only be diminished when an equivalent quantity of mechanical work is done by magnetic action.

(6) The effect of an electric current upon the surrounding medium is to make the vortices in contact with the current revolve so that the parts next to the current move in the same direction as the current. The parts furthest from the current will move in the opposite direction; and if the medium is a conductor of electricity, so that the particles are free to move in any direction, the particles touching the outside of these vortices will be moved in a direction contrary to that of the current, so that there will be an induced current in the opposite direction to the primary one.

If there were no resistance to the motion of the particles, the induced current would be equal and opposite to the primary one, and would continue as long as the primary current lasted, so that it would prevent all action of the primary current at a distance. If there is a resistance to the induced current, its particles act upon the vortices beyond them, and transmit the motion of rotation to them, till at last all the vortices in the medium are set in motion with such velocities of rotation that the particles between them have no motion except that of rotation, and do not produce currents.

In the transmission of the motion from one vortex to another, there arises a force between the particles and the vortices, by which the particles are pressed in one direction and the vortices in the opposite direction. We call the force acting on the particles the electromotive force. The reaction on the vortices is equal and opposite, so that the electromotive force cannot move any part of the medium as a whole, it can only produce currents. When the primary current is stopped, the electromotive forces all act in the opposite direction.

(7) When an electric current or a magnet is moved in presence of a conductor, the velocity of rotation of the vortices in any part of the field is altered by that motion. The force by which the proper amount of rotation is transmitted to each vortex, constitutes in this case also an electromotive force, and, if permitted, will produce currents.

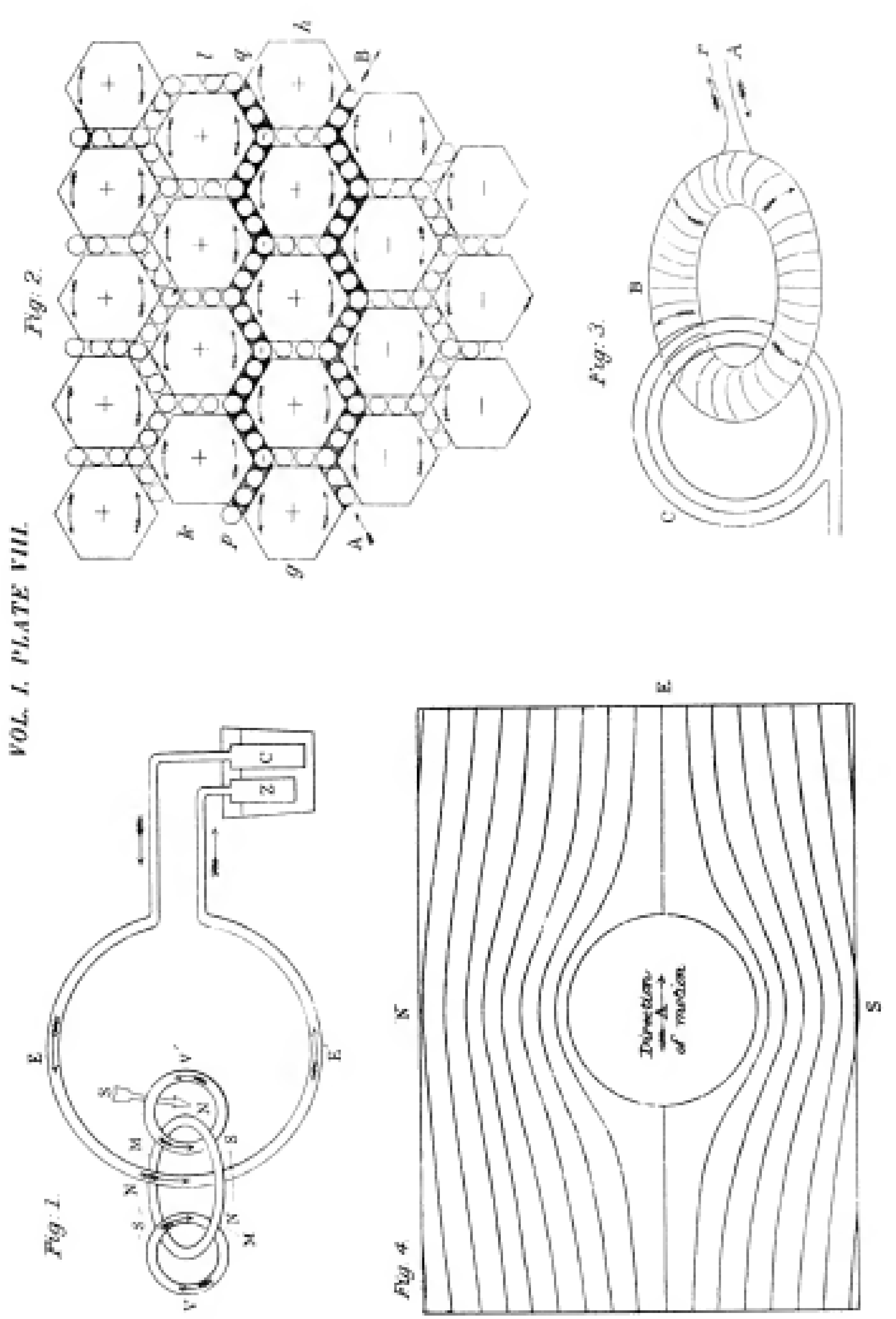
(8) When a conductor is moved in a field of magnetic force, the vortices in it and in its neighbourhood are moved out of their places, and are changed in form. The force arising from these changes constitutes the electromotive force on a moving conductor, and is found by calculation to correspond with that determined by experiment.

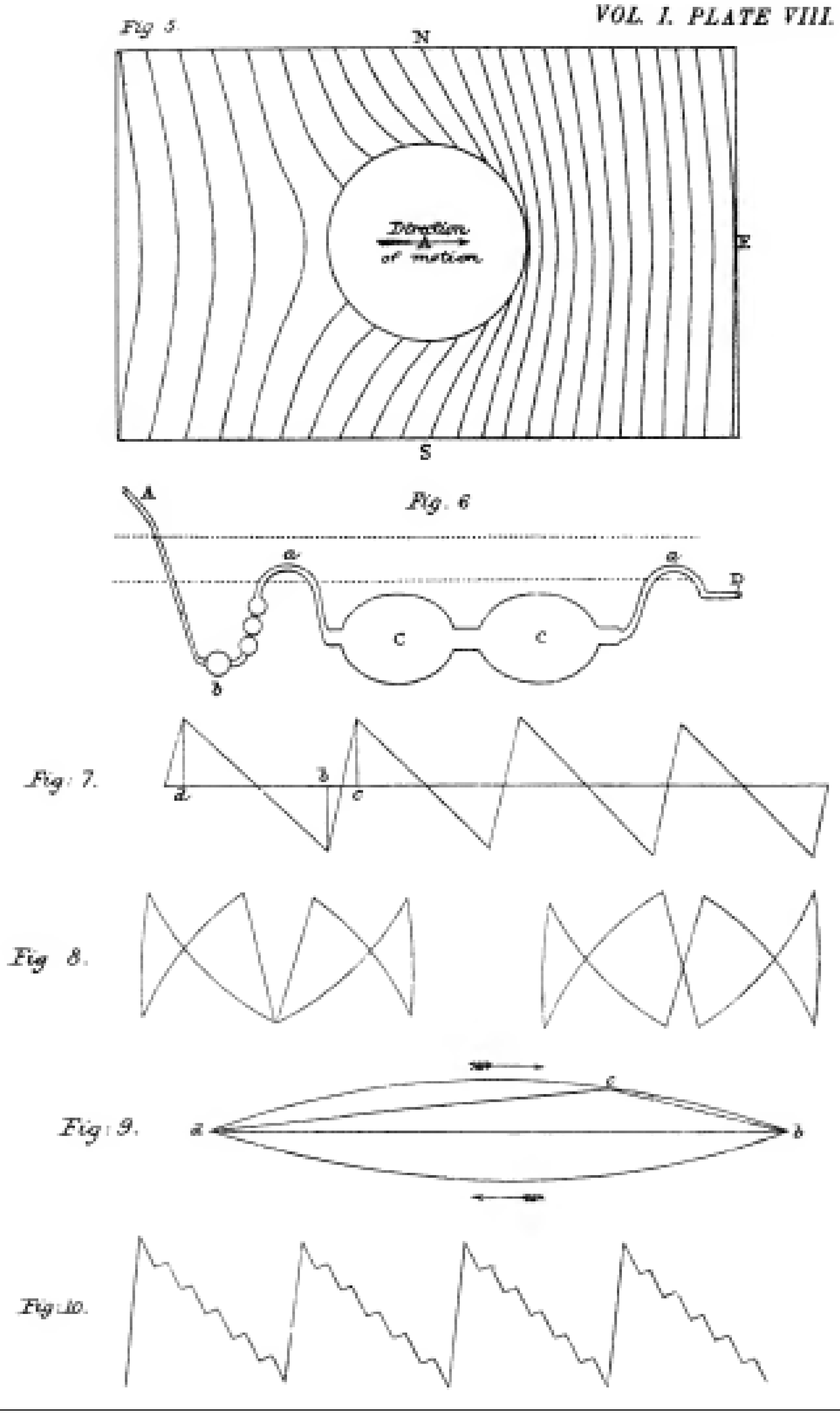
We have now shewn in what way electro -magnetic phenomena may be imitated by an imaginary system of molecular vortices. Those who have been already inclined to adopt an hypothesis of this kind, will find here the conditions which must be fulfilled in order to give it mathematical coherence, and a comparison, so far satisfactory, between its necessary results and known facts. Those who look in a different direction for the explanation of the facts, may be able to compare this theory with that of the existence of currents flowing freely through bodies, and with that which supposes electricity to act at a distance with a force depending on its velocity, and therefore not subject to the law of conservation of energy.

The facts of electro-magnetism are so complicated and various, that the explanation of any number of them by several different hypotheses must be interesting, not only to physicists, but to all who desire to understand how much evidence the explanation of phenomena lends to the credibility of a theory, or how far we ought to regard a coincidence in the mathematical expression of two sets of phenomena as an indication that these phenomena are of the same kind. We know that partial coincidences of this kind have been discovered; and the fact that they are only partial is proved by the divergence of the laws of the two sets of phenomena in other respects. We may chance to find, in the higher parts of physics, instances of more complete coincidence, which may require much investigation to detect their ultimate divergence.

NOTE.

Since the first part of this paper was written, I have seen in Crelle's *Journal* for 1859, a paper by Prof. Helmholtz on Fluid Motion, in which he has pointed out that the lines of fluid motion are arranged according to the same laws as the lines of magnetic force, the path of an electric current corresponding to a line of axes of those particles of the fluid which are in a state of rotation. This is an additional instance of a physical analogy, the investigation of which may illustrate both electro-magnetism and hydrodynamics.


VOL. I. PLATE VIII.
Fig: 1.
Fig: 2.
Fig: 3.
Fig 4
Direction of motion


VOL. I. PLATE VIII.
Fig 5.
N
Direction of motion
E
S
Fig. 6
A
a
a
D
c
c
b
Fig: 7.
a
b
c
Fig 8.
Fig: 9.
a
c
b
Fig: 10.

[From the Philosophical Magazine for January and February, 1802.]

PART III.

THE THEORY OF MOLECULAR VORTICES APPLIED TO STATICAL ELECTRICITY.

In the first part of this paper(*) I have shewn how the forces acting between magnets, electric currents, and matter capable of magnetic induction may be accounted for on the hypothesis of the magnetic field being occupied with innumerable vortices of revolving matter, their axes coinciding with the direction of the magnetic force at every point of the field.

The centrifugal force of these vortices produces pressures distributed in such a way that the final effect is a force identical in direction and magnitude with that which we observe.

In the second part(†) I described the mechanism by which these rotations may be made to coexist, and to be distributed according to the known laws of magnetic lines of force.

I conceived the rotating matter to be the substance of certain cells, divided from each other by cell-walls composed of particles which are very small compared with the cells, and that it is by the motions of these particles, and their tangential action on the substance in the cells, that the rotation is communicated from one cell to another.

I have not attempted to explain this tangential action, but it is necessary to suppose, in order to account for the transmission of rotation from the exterior to the interior parts of each cell, that the substance in the cells possesses elasticity of figure, similar in kind, though different in degree, to that observed in solid bodies. The undulatory theory of light requires us to admit this kind of elasticity in the luminiferous medium, in order to account for transverse vibrations. We need not then be surprised if the magneto-electric medium possesses the same property.

According to our theory, the particles which form the partitions between the cells constitute the matter of electricity. The motion of these particles constitutes an electric current; the tangential force with which the particles are pressed by the matter of the cells is electromotive force, and the pressure of the particles on each other corresponds to the tension or potential of the electricity.

[*] *Phil. Mag.* March, 1861 [pp. 451— 466 of this vol.].
[†] *Phil. Mag.* April and May, 1861 [pp. 467– 488 of this vol.].

If we can now explain the condition of a body with respect to the surrounding medium when it is said to be "charged" with electricity, and account for the forces acting between electrified bodies, we shall have established a connexion between all the principal phenomena of electrical science.

We know by experiment that electric tension is the same thing, whether observed in statical or in current electricity; so that an electromotive force produced by magnetism may be made to charge a Leyden jar, as is done by the coil machine.

When a difference of tension exists in different parts of any body, the electricity passes, or tends to pass, from places of greater to places of smaller tension. If the body is a conductor, an actual passage of electricity takes place; and if the difference of tensions is kept up, the current continues to flow with a velocity proportional inversely to the resistance, or directly to the conductivity of the body.

The electric resistance has a very wide range of values, that of the metals being the smallest, and that of glass being so great that a charge of electricity has been preserved (*) in a glass vessel for years without penetrating the thickness of the glass.

Bodies which do not permit a current of electricity to flow through them are called insulators. But though electricity does not flow through them, the electrical effects are propagated through them, and the amount of these effects differs according to the nature of the body; so that equally good insulators may act differently as dielectrics (†).

Here then we have two independent qualities of bodies, one by which they allow of the passage of electricity through them, and the other by which they allow of electrical action being transmitted through them without any electricity being allowed to pass. A conducting body may be compared to a porous membrane which opposes more or less resistance to the passage of a fluid, while a dielectric is like an elastic membrane which may be impervious to the fluid, but transmits the pressure of the fluid on one side to that on the other.

As long as electromotive force acts on a conductor, it produces a current which, as it meets with resistance, occasions a continual transformation of electrical energy into heat, which is incapable of being restored again as electrical energy by any reversion of the process.

Electromotive force acting on a dielectric produces a state of polarization of its parts similar in distribution to the polarity of the particles of iron under the influence of a magnet (‡), and, like the magnetic polarization, capable of being described as a state in which every particle has its poles in opposite conditions.

In a dielectric under induction, we may conceive that the electricity in each molecule is so displaced that one side is rendered positively, and the other negatively electrical, but that the

---

[*] By Professor W. Thomson.

[†] Faraday, *Experimental Researches*, Series xi.

[‡] See Prof. Mossotti, " DiscussioneAnalitica," *Memorie della Soc. Italiana* (Modena), Vol. xxiv. Part 2, p. 49.

electricity remains entirely connected with the molecule, and does not pass from one molecule to another.

The effect of this action on the whole dielectric mass is to produce a general displacement of the electricity in a certain direction. This displacement does not amount to a current, because when it has attained a certain value it remains constant, but it is the commencement of a current, and its variations constitute currents in the positive or negative direction, according as the displacement is increasing or diminishing. The amount of the displacement depends on the nature of the body, and on the electromotive force ; so that if h is the displacement, R the electromotive force, and E a coefficient depending on the nature of the dielectric,

$$\boldsymbol{R = -4\pi E^2 h}\ ;$$

and if r is the value of the electric current due to displacement,

$$\boldsymbol{r = \frac{dh}{dt}}\,.$$

These relations are Independent of any theory about the internal mechanism of dielectrics; but when we find electromotive force producing electric displacement in a dielectric, and when we find the dielectric recovering from its state of electric displacement with an equal electromotive force, we cannot help regarding the phenomena as those of an elastic body, yielding to a pressure, and recovering its form when the pressure is removed.

According to our hypothesis, the magnetic medium is divided into cells, separated by partitions formed of a stratum of particles which play the part of electricity. When the electric particles are urged in any direction, they will, by their tangential action on the elastic substance of the cells, distort each cell, and call into play an equal and opposite force arising from the elasticity of the cells. When the force is removed, the cells will recover their form, and the electricity will return to its former position.

In the following investigation I have considered the relation between the displacement and the force producing it, on the supposition that the cells are spherical. The actual form of the cells probably does not differ from that of a sphere sufficiently to make much difference in the numerical result.

I have deduced from this result the relation between the statical and dynamical measures of electricity, and have shewn, by a comparison of the electro-magnetic experiments of MM. Kohlrausch and Weber with the velocity of light as found by M. Fizeau, that the elasticity of the magnetic medium in air is the same as that of the luminiferous medium, if these two coexistent, coextensive, and equally elastic media are not rather one medium.

It appears also from Prop. XV. that the attraction between two electrified bodies depends on the value of E^2 and that therefore it would be less in turpentine than in air, if the quantity of electricity in each body remains the same. If, however, the *potentials* of the two bodies were given, the attraction between them would vary inversely as E^2 and would be greater in turpentine than in air.

Prop. XII. To find the conditions of equilibrium of an elastic sphere whose surface is exposed to normal and tangential forces, the tangential forces being proportional to the sine of the distance from a given point on the sphere.

Let the axis of z be the axis of spherical co-ordinates.

Let ξ, η, ζ be the displacements of any particle of the sphere in the directions of x, y, and z.

Let p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} be the stresses normal to planes perpendicular to the three axes, and let p_{yz}, p_{zx},p_{xy} be the stresses of distortion in the planes yz, zx, and xy.

Let μ be the coefficient of cubic elasticity, so that if

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p$$

$$p = \mu\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right) \qquad (80).$$

Let m be the coefficient of rigidity, so that

$$p_{xx} - p_{yy} = m\left(\frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy}\right), \&c. \qquad (81)$$

Then we have the following equations of elasticity in an isotropic medium,

$$p_{xx} = \left(\mu - \frac{1}{3}m\right)\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right) + m\frac{d\xi}{dx}; \qquad (82)$$

with similar equations in y and z, and also

$$p_{yz} = \frac{m}{2}\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right), \&c. \qquad (83)$$

In the case of the sphere, let us assume the radius = a, and

$$\xi = exz, \quad \eta = ezy, \quad \zeta = f\left(x^2 + y^2\right) + gz^2 + d\,. \qquad (84)$$

Then

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= 2\left(\mu - \frac{1}{3}m\right)(e+g)z + mez = p_{yy} \\ p_{zz} &= 2\left(\mu - \frac{1}{3}m\right)(e+g)z + 2mgz \\ p_{yz} &= \frac{m}{2}(e+2f)y \\ p_{xy} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

The equation of internal equilibrium with respect to *z* is

$$\frac{d}{dx}p_{zx} + \frac{d}{dy}p_{yz} + \frac{d}{dz}p_{zz} = 0, \tag{86}$$

which is satisfied in this case if

$$m(e+2f+2g) + 2\left(\mu - \frac{1}{3}m\right)(e+g) = 0 \tag{87}$$

The tangential stress on the surface of the sphere, whose radius is a at an angular distance from the axis in plane *xz*,

$$T = (p_{xx} - p_{zz})\sin\theta\cos\theta + p_{xz}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \tag{88}$$

$$= 2m(e+f-g)a\sin\theta\cos^2\theta - \frac{ma}{2}(e+2f)\sin\theta \tag{89}$$

In order that *T* may be proportional to sin θ, the first term must vanish, and therefore

$$g = e + f \tag{90}$$

$$T = -\frac{ma}{2}(e+2f)\sin\theta \tag{91}$$

The normal stress on the surface at any point is

$$\begin{aligned} N &= p_{xx}\sin^2\theta + p_{yy}\cos^2\theta + 2p_{xx}\sin\theta\cos\theta \\ &= 2\left(\mu - \frac{1}{3}m\right)(e+g)a\cos\theta + 2ma\cos\theta\{(e+f)\sin^2\theta + g\cos^2\theta\} \end{aligned} \tag{92}$$

or by (87) and (90), $$N = -ma(e+f)\cos\theta \tag{93}$$

The tangential displacement of any point is

$$t = \xi\cos s\theta - \zeta\sin\theta = -(a^2 f + d)\sin\theta \tag{94}$$

The normal displacement is

$$n = \xi \sin\theta + \zeta \cos\theta = \left\{a^2\left(f + d\right) + d\right\}\cos\theta \,. \tag{95}$$

If we make

$$a^2\left(f + d\right) + d = 0 \tag{96}$$

there will be no normal displacement, and the displacement will be entirely tangential, and we shall have

$$t = a^2 e \sin\theta \tag{97}$$

The whole work done by the superficial forces is

$$U = \frac{1}{2}\sum\left(Tt\right) dS \,,$$

the summation being extended over the surface of the sphere.

The energy of elasticity in the substance of the sphere is

$$U = \frac{1}{2}\sum\left\{\frac{d\xi}{dx}p_{xx} + \frac{d\eta}{dy}p_{yy} + \frac{d\zeta}{dz}p_{zz} + \left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right)p_{yz} + \left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right)p_{zx} + \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)p_{xy}\right\}dV$$

the summation being extended to the whole contents of the sphere.

We find, as we ought, that these quantities have the same value, namely

$$U = -\frac{2}{3}\pi a^5 me\left(e + 2f\right) \,. \tag{98}$$

We may now suppose that the tangential action on the surface arises from a layer of particles in contact with it, the particles being acted on by their own mutual pressure, and acting on the surfaces of the two cells with which they are in contact.

We assume the axis of z to be in the direction of maximum variation of the pressure among the particles, and we have to determine the relation between an electromotive force R acting on the particles in that direction, and the electric displacement h which accompanies it.

Prop. XIII. — To find the relation between electromotive force and electric displacement when a uniform electromotive force R acts parallel to the axis of z.

Take any element δS of the surface, covered with a stratum whose density is ρ, and having its normal inclined θ to the axis of z; then the tangential force upon it will be

$$\rho R \delta S \sin\theta = 2T\delta S \,. \tag{99}$$

T being, as before, the tangential force on each side of the surface. Putting $\rho = 1/2\pi$ as in equation (34)([*]), we find

$$R = -2\pi ma(e + 2f) \,. \tag{100}$$

The displacement of electricity due to the distortion of the sphere is

$$\sum \delta S \frac{1}{2} \rho t \sin\theta, \text{ taken over the whole surface;} \tag{101}$$

and if *h* is the electric displacement per unit of volume, we shall have

$$\frac{4}{3}\pi a^3 h = \frac{2}{3} a^4 e \,, \tag{102}$$

$$\text{or } h = \frac{1}{2\pi} ae \,; \tag{103}$$

so that

$$R = 4\pi^2 m \frac{e + 2f}{e} h \,, \tag{104}$$

or we may write

$$R = -4\pi E^2 h \,, \tag{105}$$

provided we assume

$$E^2 = -\pi m \frac{e + 2f}{e} \,. \tag{106}$$

Finding *e* and *f* from (87) and (90), we get

$$E^2 = \pi m \frac{3}{1 + \frac{5}{3}\frac{m}{\mu}} \,. \tag{107}$$

The ratio of *m* to μ varies in different substances; but in a medium whose elasticity depends entirely upon forces acting between pairs of particles, this ratio is that of 6 to 5, and in this case

$$E^2 = \pi m \,. \tag{108}$$

When the resistance to compression is infinitely greater than the resistance to distortion, as in a liquid rendered slightly elastic by gum or jelly,

$$E^2 = 3\pi m \tag{109}$$

[*] *Phil. Mag*. April, 1861 [p. 471 of this vol.]

The value of E^2 must lie between these limits. It is probable that the substance of our cells is of the former kind, and that we must use the first value of E^2 which is that belonging to a hypothetically "perfect" solid (*) in which

$$5m = 6\mu\,, \tag{110}$$

so that we must use equation (108).

Prop. XIV. — To correct the equations (9) (†) of electric currents for the effect due to the elasticity of the medium.

We have seen that electromotive force and electric displacement are connected by equation (105). Differentiating this equation with respect to *t*, we find

$$\frac{dR}{dt} = -4\pi E^2 \frac{dh}{dt}\,, \tag{111}$$

shewing that when the electromotive force varies, the electric displacement also varies. But a variation of displacement is equivalent to a current, and this current must be taken into account in equations (9) and added to *r*. The three equations then become

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} - \frac{1}{E^2}\frac{dP}{dt}\right) \\ q &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\gamma}{dx} - \frac{1}{E^2}\frac{dQ}{dt}\right) \\ r &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} - \frac{1}{E^2}\frac{dR}{dt}\right) \end{aligned}\right\}, \tag{112}$$

where$p$, q, r are the electric currents in the directions of x, y, and z; α, β, γ are the components of magnetic intensity; and P, Q, R are the electromotive forces. Now if e be the quantity of free electricity in unit of volume, then the equation of continuity will be

$$\frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} + \frac{de}{dt} = 0 \tag{113}$$

Differentiating (112) with respect to x, y, and z respectively, and substituting, we find

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{4\pi E^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz}\right) \tag{114}$$

---

*See Rankine "On Elasticity," *Camb. and Dub. Math.Journ*. 1851.

†*Phil Mag*. March, 1861 [p. 462 of this vol.].

whence $$e = \frac{1}{4\pi E^2}\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz}\right) \tag{115}$$

the constant being omitted, because $e = 0$ when there are no electromotive forces.

Prop. XV. — To find the force acting between two electrified bodies.

The energy in the medium arising from the electric displacements is

$$U = \sum \frac{1}{2}(Pf + Qg + Rh)\delta V\ , \tag{116}$$

where P, Q, R are the forces, and f, g, h the displacements. Now when there is no motion of the bodies or alteration of forces, it appears from equations (77) ([*])that

$$P = -\frac{d\Psi}{dx}, \qquad Q = -\frac{d\Psi}{dy}, \qquad R = -\frac{d\Psi}{dz}; \tag{118}$$

and we know by (105) that

$$P = -4\pi E^2 f\ , Q = -4\pi E^2 g\ , \qquad R = -4\pi E^2 h\ ; \tag{119}$$

whence $$U = \frac{1}{8\pi E^2}\sum\left(\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right)\delta V\ . \tag{120}$$

Integrating by parts throughout all space, and remembering that Ψ vanishes at an infinite distance,

$$U = -\frac{1}{8\pi E^2}\sum \Psi\left(\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2}\right)\delta V\ ; \tag{121}$$

or by (115), $$U = \frac{1}{2}\sum(\Psi e)\delta V\ . \tag{122}$$

Now let there be two electrified bodies, and let e, be the distribution of electricity in the first, and Ψ_1 the electric tension due to it, and let

$$e_1 = \frac{1}{4\pi E^2}\left(\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2}\right). \tag{123}$$

[*] *Phil. Mag*. May, 1861 [p. 482 of this vol.].

Let e_2 be the distribution of electricity in the second body, and Ψ_2, the tension due to it; then the whole tension at any point will be $\Psi_1 + \Psi_2$ and the expansion for U will become

$$U = \frac{1}{2}\sum\left(\Psi_1 e_1 + \Psi_2 e_2 + \Psi_1 e_2 + \Psi_2 e_1\right)\delta V \ . \qquad (124)$$

Let the body whose electricity is e_1 be moved in any way, the electricity moving along with the body, then since the distribution of tension Ψ_1 moves with the body, the value of $\Psi_1 e_1$ remains the same.

$\Psi_2 e_2$ also remains the same; and Green has shewn (Essay on Electricity, p. 10) that $\Psi_1 e_2 = \Psi_2 e_1$, so that the work done by moving the body against electric forces

$$W = \delta U = \delta \sum \left(\Psi_2 e_1\right)\delta V \ . \qquad (125)$$

And if e_1 is confined to a small body,

$$W = e_1 \delta \Psi_2 ,$$

or

$$F dr = e_1 \frac{d\Psi_2}{dr} dr , \qquad (126)$$

where$F$ is the resistance and dr the motion.

If the body e_2 be small, then if r is the distance from e_2, equation (123) gives

$$\Psi_2 = E^2 \frac{e_2}{r} ;$$

whence

$$F = -E^2 \frac{e_1 e_2}{r^2} ; \qquad (127)$$

or the force is a repulsion varying inversely as the square of the distance.

Now let η_1 and 1 η_2 be the same quantities of electricity measured statically, then we know by definition of electrical quantity

$$F = -\frac{\eta_1 \eta_2}{r^2} ; \qquad (128)$$

and this will be satisfied provided

$$\eta_1 = E e_1 \quad \text{and} \quad \eta_2 = E e_2 \ ; \qquad (129)$$

so that the quantity F previously determined in Prop. XIII. is the number by which the electrodynamic measure of any quantity of electricity must be multiplied to obtain its electrostatic measure.

That electric current which, circulating round a ring whose area is unity, produces the same effect on a distant magnet as a magnet would produce whose strength is unity and length unity placed perpendicularly to the plane of the ring, is a unit current; and E units, of electricity, measured statically, traverse the section of this current in one second, — these units being such that any two of them, placed at unit of distance, repel each other with unit of force.

We may suppose either that E units of positive electricity move in the positive direction through the wire, or that E units of negative electricity move in the negative direction, or, thirdly, that $^1/_2E$ units of positive electricity move in the positive direction, while $^1/_2E$ units of negative electricity move in the negative direction at the same time.

The last is the supposition on which MM. Weber and Kohlrausch (*) proceed, who have found

$$\frac{1}{2}E = 155{,}370{,}000{,}000 \qquad (130)$$

the unit of length being the millimetre, and that of time being one second, whence

$$E = 310{,}740{,}000{,}000 \qquad (131)$$

Prop. XVI. — To find the rate of propagation of transverse vibrations through the elastic medium of which the cells are composed, on the supposition that its elasticity is due entirely to forces acting between pairs of particles.

By the ordinary method of investigation we know that

$$V = \sqrt{\frac{m}{\rho}}, \qquad (132)$$

where$m$ is the coefficient of transverse elasticity, and ρ is the density. By referring to the equations of Part I., it will be seen that if ρ is the density of the matter of the vortices, and μ is the "coefficient of magnetic induction,"

$$\mu = \pi\rho\ ; \qquad (133)$$

whence

$$\pi m = V^2\mu\ ; \qquad (134)$$

*Abhandlungen der König. Sächsischen Gesellschaft Vol. iii. (1857), p. 260.

and by (108), $$E = V\sqrt{\mu}\,. \tag{135}$$

In air or vacuum $\mu = 1$, and therefore

$$\left.\begin{aligned} V &= E \\ &= 310{,}740{,}000{,}000 \textit{ millimetres per second} \\ &= 193{,}088 \textit{ miles per second} \end{aligned}\right\}. \tag{136}$$

The velocity of light in air, as determined by M. Fizeau (*), is 70,843 leagues per second (25 leagues to a degree) which gives

V= 314,858,000,000 millimetres

= 195,647 miles per second.(137)

The velocity of transverse undulations in our hypothetical medium, calculated from the electro-magnetic experiments of MM. Kohlrausch and Weber, agrees so exactly with the velocity of light calculated from the optical experiments of M. Fizeau, that we can scarcely avoid the inference that *light consists in the transverse undulations of the same medium which is the cause of electric and magnetic phenomena*.

Prop. XVII. — To find the electric capacity of a Leyden jar composed of any given dielectric placed between two conducting surfaces.

Let the electric tensions or potentials of the two surfaces be Ψ_1 and Ψ_2. Let S be the area of each surface, and θ the distance between them, and let e and $-e$ be the quantities of electricity on each surface; then the capacity

$$C = \frac{e}{\Psi_1 - \Psi_2}\,. \tag{138}$$

Within the dielectric we have the variation of Ψ perpendicular to the surface

$$= \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{\theta}$$

Beyond either surface this variation is zero.

Hence by (115) applied at the surface, the electricity on unit of area is

Comptes Rendus, Vol. xxix. (1849), p. 90. In Galbraith and Haughton's *Manual of Astronomy*, M. Fizeau's result is stated at 169,944 geographical miles of 1000 fathoms, which gives 193,118 statute miles; the value deduced from aberration is 192,000 miles.

$$\frac{\Psi_1 - \Psi_2}{4\pi E^2 \theta}; \tag{139}$$

and we deduce the whole capacity of the apparatus,

$$C = \frac{S}{4\pi E^2 \theta}; \tag{140}$$

so that the quantity of electricity required to bring the one surface to a given tension varies directly as the surface, inversely as the thickness, and inversely as the square of E.

Now the coefficient of induction of dielectrics is deduced from the capacity of induction-apparatus formed of them; so that if D is that coefficient, D varies inversely as E^2, and is unity for air. Hence

$$D = \frac{V^2}{V_1^2 \mu}, \tag{141}$$

where$V$ and V_1 are the velocities of light in air and in the medium. Now if i is the. index of refraction, $V/V_1 = i$, and

$$D = \frac{i^2}{\mu}; \tag{142}$$

so that the inductive power of a dielectric varies directly as the square of the index of refraction, and inversely as the magnetic inductive power.

In dense media, however, the optical, electric, and magnetic phenomena may be modified in different degrees by the particles of gross matter; and their mode of arrangement may influence these phenomena differently in different directions. The axes of optical, electric, and magnetic properties will probably coincide; but on account of the unknown and probably complicated nature of the reactions of the heavy particles on the ætherial medium, it may be impossible to discover any general numerical relations between the optical, electric, and magnetic ratios of these axes.

It seems probable, however, that the value of E, for any given axis, depends upon the velocity of light whose vibrations are parallel to that axis, or whose plane of polarization is perpendicular to that axis.

In a uniaxal crystal, the axial value of E will depend on the velocity of the extraordinary ray, and the equatorial value will depend on that of the ordinary ray.

In "positive" crystals, the axial value of E will be the least and in negative the greatest.

The value of D_1, which varies inversely as E^2 will, *cæteris paribus*, be greatest for the axial direction in positive crystals, and for the equatorial direction in negative crystals, such as Iceland spar. If a spherical portion of a crystal, radius $=a$, be suspended in a field of electric force which would act on unit of electricity with force =1, and if D and D_1, be the coefficients of dielectric induction along the two axes in the plane of rotation, then if θ be the inclination of the axis to the electric force, the moment tending to turn the sphere will be

$$\frac{3}{2}\frac{(D_1 - D_2)}{(2D_1+1)(2D_2+1)} I^2 a^2 \sin 2\theta\,, \qquad (143)$$

and the axis of greatest dielectric induction (D_1) will tend to become parallel to the lines of electric force.

PART IV.

THE THEORY OF MOLECULAR VORTICES APPLIED TO THE ACTION OF MAGNETISM

ON POLARIZED LIGHT.

The connexion between the distribution of lines of magnetic force and that of electric currents may be completely expressed by saying that the work done on a unit of imaginary magnetic matter, when carried round any closed curve, is proportional to the quantity of electricity which passes through the closed curve. The mathematical form of this law may be expressed as in equations (9) ([*]), which I here repeat, where α, β, γ are the rectangular components of magnetic intensity, and p, q, r are the rectangular components of steady electric currents,

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right) \\ q &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}\right) \\ r &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right) \end{aligned}\right\} . \qquad (9)$$

The same mathematical connexion is found between other sets of phenomena in physical science.

(1) If α, β, γ represent displacements, velocities, or forces, then p, q, r will be rotatory displacements, velocities of rotation, or moments of couples producing rotation, in the elementary portions of the mass.

(2) If α, β, γ represent rotatory displacements in a uniform and continuous substance, then p, q, r represent the *relative* linear displacement of a particle with respect to those in its immediate neighbourhood. See a paper by Prof. W. Thomson "On a Mechanical Representation of Electric, Magnetic, and Galvanic Forces," *Camb. and Dublin Math. Journal*, Jan. 1847.

(3) If α, β, γ represent the rotatory velocities of vortices whose centres are fixed, then p, q, r represent the velocities with which loose particles placed between them would be carried along. See the second part of this paper (*Phil. Mag*. April, 1861) [p. 469].

[*] *Phil Mag*. March, 1861 [p. 462 of this vol].

It appears from all these instances that the connexion between magnetism and electricity has the same mathematical form as that between certain pairs of phenomena, of which one has a linear and the other a *rotatory* character. Professor Challis(*) conceives magnetism to consist in currents of a fluid whose direction corresponds with that of the lines of magnetic force; and electric currents, on this theory, are accompanied by, if not dependent on, a rotatory motion of the fluid about the axis of the current. Professor Helmholtz (†) has investigated the motion of an incompressible fluid, and has conceived lines drawn so as to correspond at every point with the instantaneous axis of rotation of the fluid there. He has pointed out that the lines of fluid motion are arranged according to the same laws with respect to the lines of rotation, as those by which the lines of magnetic force are arranged with respect to electric currents. On the other hand, in this paper I have regarded magnetismas a phenomenon of rotation, and electric currents as consisting of the actual translation of particles, thus assuming the inverse of the relation between the two sets of phenomena.

Now it seems natural to suppose that all the direct effects of any cause which is itself of a longitudinal character, must be themselves longitudinal, and that the direct effects of a rotatory cause must be themselves rotatory. A motion of translation along an axis cannot produce a rotation about that axis unless it meets with some special mechanism, like that of a screw, which connects a motion in a given direction along the axis with a rotation in a given direction round it; and a motion of rotation, though it may produce tension along the axis, cannot of itself produce a current in one direction along the axis rather than the other.

Electric currents are known to produce effects of transference in the direction of the current. They transfer the electrical state from one body to another, and they transfer the elements of electrolytes in opposite directions, but they do not (‡) cause the plane of polarization of light to rotate when the light traverses the axis of the current.

On the other hand, the magnetic state is not characterized by any strictly longitudinal phenomenon. The north and south poles differ only in their names, and these names might be exchanged without altering the statement of any magnetic phenomenon; whereas the positive and negative poles of a battery are completely distinguished by the different elements of water which are evolved there. The magnetic state, however, is characterized by a well-marked rotatory phenomenon discovered by Faraday (◊) — the rotation of the plane of polarized light when transmitted along the lines of magnetic force.

When a transparent diamagnetic substance has a ray of plane-polarized light passed through it, and if lines of magnetic force are then produced in the substance by the action of a magnet or of an electric current, the plane of polarization of the transmitted light is found to be changed, and to be turned through an angle depending on the intensity of the magnetizing force within the substance.

---

[*] *Phil. Mag*. December, 1860, January and February, 1861.

[†] Crelle, *Journal,* Vol. LV. (1858), p. 25.

[‡] Faraday, *Experimental Researches,* 951—954, and 2216—2220

[◊] *Ibid*., Series xix.

The direction of this rotation in diamagnetic substances is the same as that in which positive electricity must circulate round the substance in order to produce the actual magnetizing force within it; or if we suppose the horizontal part of terrestrial magnetism to be the magnetizing force acting on the substance, the plane of polarization would be turned in the direction of the earth's true rotation, that is, from west upwards to east.

In paramagnetic substances, M. Verdet (*) has found that the plane of polarization is turned in the opposite direction, that is, in the direction in which negative electricity would flow if the magnetization were effected by a helix surrounding the substance.

In both cases the absolute direction of the rotation is the same, whether the light passes from north to south or from south to north, — a fact which distinguishes this phenomenon from the rotation produced by quartz, turpentine, &c., in which the absolute direction of rotation is reversed when that of the light is reversed. The rotation in the latter case, whether related to an axis, as in quartz, or not so related, as in fluids, indicates a relation between the direction of the ray and the direction of rotation, which is similar in its formal expression to that between the longitudinal and rotatory motions of a right-handed or a left-handed screw; and it indicates some property of the substance the mathematical form of which exhibits right-handed or left-handed relations, such as are known to appear in the external forms of crystals having these properties. In the magnetic rotation no such relation appears, but the direction of rotation is directly connected with that of the magnetic lines, in a way which seems to indicate that magnetism is really a phenomenon of rotation.

The transference of electrolytes in fixed directions by the electric current, and the rotation of polarized light in fixed directions by magnetic force, are the facts the consideration of which has induced me to regard magnetism as a phenomenon of rotation, and electric currents as phenomena of translation, instead of following out the analogy pointed out by Helmholtz, or adopting the theory propounded by Professor Challis.

The theory that electric currents are linear, and magnetic forces rotatory phenomena, agrees so far with that of Ampere and Weber ; and the hypothesis that the magnetic rotations exist wherever magnetic force extends, that the centrifugal force of these rotations accounts for magnetic attractions, and that the inertia of the vortices accounts for induced currents, is supported by the opinion of Professor W. Thomson(†). In fact the whole theory of molecular vortices developed in this paper has been suggested to me by observing the direction in which those investigators who study the action of media are looking for the explanation of electro-magnetic phenomena.

Professor Thomson has pointed out that the cause of the magnetic action on light must be a real rotation going on in the magnetic field. A right-handed circularly polarized ray of light is found to travel with a different velocity according as it passes from north to south, or from south to north, along a line of magnetic force. Now, whatever theory we adopt about the direction of vibrations in plane-polarized light, the geometrical arrangement of the parts of the medium during the passage of

---

[*] *Comptes Rendus*, Vol. XLIII. p. 529; Vol. XLIV, p. 1209.

[†] See Nichol's *Cyclopædia*, art. "Magnetism, Dynamical Relations of," edition 1860; *Proceedings of Royal Society*, June 1856 and June 1861; and *Phil. Mag*. 1857

a right-handed circularly polarized ray is exactly the same whether the ray is moving north or south. The only difference is, that the particles describe their circles in opposite directions. Since, therefore, the configuration is the same in the two cases, the forces acting between particles must be the same in both, and the motions due to these forces must be equal in velocity if the medium was originally at rest; but if the medium be in a state of rotation, either as a whole or in molecular vortices, the circular vibrations of light may differ in velocity according as their direction is similar or contrary to that of the vortices.

We have now to investigate whether the hypothesis developed in this paper — that magnetic force is due to the centrifugal force of small vortices, and that these vortices consist of the same matter the vibrations of which constitute light — leads to any conclusions as to the effect of magnetism on polarized light. We suppose transverse vibrations to be transmitted through a magnetized medium. How will the propagation of these vibrations be affected by the circumstance that portions of that medium are in a state of rotation?

In the following investigation, I have found that the only effect which the rotation of the vortices will have on the light will be to make the plane of polarization rotate in the same direction as the vortices, through an angle proportional —

(A) to the thickness of the substance,

(B) to the resolved part of the magnetic force parallel to the ray,

(C) to the index of refraction of the ray,

(D) inversely to the square of the wave-length in air,

(E) to the *mean radius* of the vortices,

(F) to the capacity for magnetic induction.

A and B have been fully investigated by M. Verdet([*]), who has shewn that the rotation is strictly proportional to the thickness and to the magnetizing force, and that, when the ray is inclined to the magnetizing force, the rotation is as the cosine of that inclination. *D* has been supposed to give the true relation between the rotation of different rays; but it is probable that *C* must be taken into account in an accurate statement of the phenomena. The rotation varies, not exactly inversely as the square of the wave length, but a little faster; so that for the highly refrangible rays the rotation is greater than that given by this law, but more nearly as the index of refraction divided by the square of the wave-length.

The relation (*E*) between the amount of rotation and the size of the vortices shews that different substances may differ in rotating power independently of any observable difference in other

[*] *Annales de Chimie et de Physique*, série 3, Vol. XLI. p. 370; Vol. XLIII. p. 37.

respects. We know nothing of the absolute size of the vortices; and on our hypothesis the optical phenomena are probably the only data for determining their relative size in different substances.

On our theory, the direction of the rotation of the plane of polarization depends on that of the mean moment of momenta, or *angular momentum*, of the molecular vortices; and since M. Verdet has discovered that magnetic substances have an effect on light opposite to that of diamagnetic substances, it follows that the molecular rotation must be opposite in the two classes of substances.

We can no longer, therefore, consider diamagnetic bodies as being those whose coefficient of magnetic induction is less than that of space empty of gross matter. We must admit the diamagnetic state to be the opposite of the paramagnetic ; and that the vortices, or at least the influential majority of them, in diamagnetic substances, revolve in the direction in which positive electricity revolves in the magnetizing bobbin, while in paramagnetic substances they revolve in the opposite direction.

This result agrees so far with that part of the theory of M. Weber (*) which refers to the paramagnetic and diamagnetic conditions. M. Weber supposes the electricity in paramagnetic bodies to revolve the same way as the surrounding helix, while in diamagnetic bodies it revolves the opposite way. Now if we regard negative or resinous electricity as a substance the absence of which constitutes positive or vitreous electricity, the results will be those actually observed. This will be true independently of any other hypothesis than that of M. Weber about magnetism and diamagnetism, and does not require us to admit either M. Weber's theory of the mutual action of electric particles in motion, or our theory of cells and cell-walls.

I am inclined to believe that iron differs from other substances in the manner of its action as well as in the intensity of its magnetism; and I think its behaviour may be explained on our hypothesis of molecular vortices, by supposing that the particles of the iron itself are set in rotation by the tangential action of the vortices, in an opposite direction to their own. These large heavy particles would thus be revolving exactly as we have supposed the infinitely small particles constituting electricity to revolve, but without being free like them to change their place and form currents.

The whole energy of rotation of the magnetized field would thus be greatly increased, as we know it to be; but the angular momentum of the iron particles would be opposite to that of the ætherial cells and immensely greater, so that the total angular momentum of the substance will be in the direction of rotation of the iron, or the reverse of that of the vortices. Since, however, the angular momentum depends on the absolute size of the revolving portions of the substance, it may depend on the state of aggregation or chemical arrangement of the elements, as well as on the ultimate nature of the components of the substance. Other phenomena in nature seem to lead to theconclusion that all substances are made up of a number of parts, finite in size, the particles composing these parts being themselves capable of internal motion.

Prop. XVIII. — To find the angular momentum of a vortex. The angular momentum of any material system about an axis is the sum of the products of the mass, *dm*, of each particle multiplied

---

[*] *Taylor'sScientific Memoirs*, Vol. v. p. 477.

by twice the area it describes about that axis in unit of time; or if *A* is the angular momentum about the axis of *x*,

$$A = \sum dm\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} \right).$$

As we do not know the distribution of density within the vortex, we shall determine the relation between the angular momentum and the energy of the vortex which was found in Prop. VI.

Since the time of revolution is the same throughout the vortex, the mean angular velocity ω will be uniform and $=a/r$, where *a* is the velocity at the circumference, and *r* the radius. Then

$$A = \sum dmr^2\omega \;\; A = \sum dmr^2\omega$$

and the energy
$$E = \frac{1}{2}\sum dmr^2\omega^2 = \frac{1}{2}A\omega$$

$$= \frac{1}{8\pi}\mu\alpha^2 V \text{ by Prop. VI. (*)}$$

whence
$$A = \frac{1}{4\pi}\mu r\alpha V \,. \tag{144}$$

for the axis of *x*, with similar expressions for the other axes, *V* being the volume, and *r* the radius of the vortex.

Prop. XIX. — To determine the conditions of undulatory motion in a medium containing vortices, the vibrations being perpendicular to the direction of propagation.

Let the waves be plane-waves propagated in the direction of *z*, and let the axis of *x* and *y* be taken in the directions of greatest and least elasticity in the plane *xy*. Let *x* and y represent the displacement parallel to these axes, which will be the same throughout the same wave-surface, and therefore we shall have *x* and *y* functions of *z* and *t* only.

Let *X*be the tangential stress on unit of area parallel to *xy*, tending tomove the part next the origin in the direction of *x*.

Let *Y* be the corresponding tangential stress in thedirection of *y*.

Let k_1 and $k_\wedge$ be the coefficients of elasticity with respect

to these two kinds of tangential stress; then, if the medium is at rest,

---

[*] *Phil. Mag*. April 1861 [p. 472 of this vol.].

$$X = k_1 \frac{dx}{dz}, \qquad Y = k_2 \frac{dy}{dz}.$$

Now let us suppose vortices in the medium whose velocities are represented as usual by the symbols α, β, γ, and let us suppose that the value of α is increasing at the rate $d\alpha/dt$, on account of the action of the tangential stresses alone, there being no electromotive force in the field. The angular momentum in the stratum whose area is unity, and thickness *dz*, is therefore increasing at the rate $\frac{1}{4\pi}\mu r \frac{d\alpha}{dt} dz$; and if the part of the force *Y* which produces this effect is *Y'*, then the moment of *Y'* is $-Y'dz$, so that

$$Y' = -\frac{1}{4\pi}\mu r \frac{d\alpha}{dt}.$$

The complete value of *Y* when the vortices are in a state of varied motion is

$$Y = k_2 \frac{dy}{dz} - \frac{1}{4\pi}\mu r \frac{d\alpha}{dt}$$

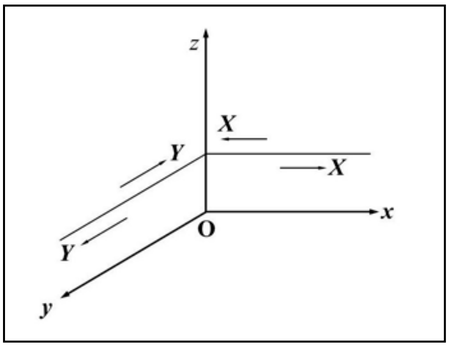
Similarly

$$\left.\begin{aligned} Y &= k_2 \frac{dy}{dz} - \frac{1}{4\pi}\mu r \frac{d\alpha}{dt} \\ X &= k_1 \frac{dx}{dz} + \frac{1}{4\pi}\mu r \frac{d\beta}{dt} \end{aligned}\right\}. \qquad (145)$$

The whole force acting upon a stratum whose thickness is *dz* and area unity, is $\frac{dX}{dz} dz$ in the direction of *x*, and $\frac{dX}{dz} ydz$ in direction of *y*. The mass of the stratum is ρdz, so that we have as the equations of motion,

$$\left.\begin{aligned} \rho \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{dX}{dz} = k_1 \frac{d^2 x}{dz^2} + \frac{d}{dz}\frac{1}{4\pi}\mu r \frac{d\beta}{dt} \\ \rho \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{dY}{dz} = k_2 \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{d}{dz}\frac{1}{4\pi}\mu r \frac{d\alpha}{dt} \end{aligned}\right\}. \qquad (146)$$

Now the changes of velocity $d\alpha/dt$ and $d\beta/dt$ are produced by the motion of the medium containing the vortices, which distorts and twists every element of its mass; so that we must refer to Prop. X (*) to determine these quantities in terms of the motion. We find there at equation (68),



$$d\alpha = \alpha \frac{d}{dx}\delta x + \beta \frac{d}{dy}\delta x + \gamma \frac{d}{dz}\delta x. \qquad (68)$$

Phil. Mag. May 1861 [p. 481 of this vol.]

Since δx and δy are functions of z and t only, we may write this equation

and in like manner,
$$\left.\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt}&=\gamma\frac{d^2x}{dzdt}\\ \frac{d\beta}{dt}&=\gamma\frac{d^2y}{dzdt}\end{aligned}\right\} \qquad (147)$$

so that if we now put $k_1 = a^2\rho$, $k_2 = b^2\rho$, and $\frac{1}{4\pi}\frac{\mu r}{\rho}\gamma = c^2$ we may write the equations of motion

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=a^2\frac{d^2x}{dz^2}+c^2\frac{d^3y}{dz^2dt}\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=b^2\frac{d^2y}{dz^2}-c^2\frac{d^3x}{dz^2dt}\end{aligned}\right\} \qquad (148)$$

These equations may be satisfied by the values

$$\left.\begin{aligned}x&=A\cos(nt-mz+a)\\ y&=B\sin(nt-mz+a)\end{aligned}\right\} \qquad (149)$$

provided $\left(n^2m^2a^2\right)A = m^2nc^2B$

and $\left(n^2m^2b^2\right)B = m^2nc^2A$ (150)

Multiplying the last two equations together, we find

$$\left(n^2-m^2a^2\right)\left(n^2m^2b^2\right)=m^4n^2c^4. \qquad (151)$$

an equation quadratic with respect to m^2, the solution of which is

$$m^2=\frac{2n^2}{a^2+b^2\mp\sqrt{\left(a^2-b^2\right)^2+4n^2c^4}} \qquad (152)$$

These values of m^2 being put in the equations (150) will each give a ratio of A and B,

$$\frac{A}{B}=\frac{a^2-b^2\mp\sqrt{\left(a^2-b^2\right)^2+4n^2c^4}}{2nc^2},$$

which being substituted in equations (149), will satisfy the original equations (148). The most general undulation of such a medium is therefore compounded of two elliptic undulations of different eccentricities travelling with different velocities and rotating in opposite directions. The results may be more easily explained in the case in which $a = b$; then

$$m^2 = \frac{n^2}{a^2 \mp nc^2} \text{ and } A = \mp B. \tag{153}$$

Let us suppose that the value of *A* is unity for both vibrations, then we shall have

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos\left(nt - \frac{nz}{\sqrt{a^2 - nc^2}}\right) + \cos\left(nt - \frac{nz}{\sqrt{a^2 + nc^2}}\right) \\ y &= \sin\left(nt - \frac{nz}{\sqrt{a^2 - nc^2}}\right) + \sin\left(nt - \frac{nz}{\sqrt{a^2 + nc^2}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{154}$$

The first terms of *x* and *y* represent a circular vibration in the negative direction, and the second term a circular vibration in the positive direction, the positive having the greatest velocity of propagation. Combining the terms, we may write

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\cos(nt - pz)\cos qz \\ y &= 2\cos(nt - pz)\sin qz \end{aligned}\right\}. \tag{155}$$

where
$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{n}{2\sqrt{a^2 - nc^2}} - \frac{n}{2\sqrt{a^2 + nc^2}} \\ q &= \frac{n}{2\sqrt{a^2 - nc^2}} + \frac{n}{2\sqrt{a^2 + nc^2}} \end{aligned}\right\} \tag{156}$$
and

These are the equations of an undulation consisting of a plane vibration whose periodic time is $2\pi/n$, and wave-length $2\pi/p = \lambda$, propagated in the direction of *z* with a velocity $n/p = v$, while the plane of the vibration revolves about the axis of *z* in the positive direction so as to complete a revolution when $z = 2\pi/q$.

Now let us suppose c^2 small, then we may write

$$p = \frac{n}{a} \text{ and } q = \frac{n^2c^2}{2a^3}, \tag{157}$$

and remembering that $c^2 = \frac{1}{4\pi}\frac{r}{\rho}\mu\gamma$, we find

$$q = \frac{\pi}{2}\frac{r}{\rho}\frac{\mu\gamma}{\lambda^2 v}. \tag{158}$$

Here *r* is the radius of the vortices, an unknown quantity, ρ is the density of the luminiferous medium in the body, which is also unknown; but if we adopt the theory of Fresnel, and make *s* the density in space devoid of gross matter, then

$$\rho = si^2 \tag{159}$$

where*i* is the index of refraction.

On the theory of MacCullagh and Neumann,

$$\rho = s. \tag{160}$$

in all bodies.

μ is the coefficient of magnetic induction, which is unity in empty space or in air.

γ is the velocity of the vortices at their circumference estimated in the ordinary units. Its value is unknown, but it is proportional to the intensity of the magnetic force.

Let *Z* be the magnetic intensity of the field, measured as in the case of terrestrial magnetism, then the intrinsic energy in air per unit of volume is

$$\frac{1}{8\pi} Z^2 = \frac{1}{8\pi} \pi s \gamma^2 ,$$

where*s* is the density of the magnetic medium in air, which we have reason to believe the same as that of the luminiferous medium. We therefore put

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\pi s}} Z , \tag{161}$$

λ is the wave-length of the undulation in the substance. Now if Λ be the wave-length for the same ray in air, and *i* the index of refraction of that ray in the body,

$$\lambda = \frac{\Lambda}{i} , \tag{162}$$

Also *v*, the velocity of light in the substance, is related to *V*, the velocity of light in air, by the equation

$$v = \frac{V}{i} , \tag{163}$$

Hence if *z* be the thickness of the substance through which the ray passes, the angle through which the plane of polarization will be turned will be in degrees,

$$\theta = \frac{180}{\pi} qz , \tag{164}$$

or, by what we have now calculated,

$$\theta = 90^\circ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{r}{s^{\frac{3}{2}}} \frac{\mu i Z z}{\Lambda^2 V}. \tag{165}$$

In this expression all the quantities are known by experiment except *r*, the radius of the vortices in the body, and *s*, the density of the luminiferous medium in air.

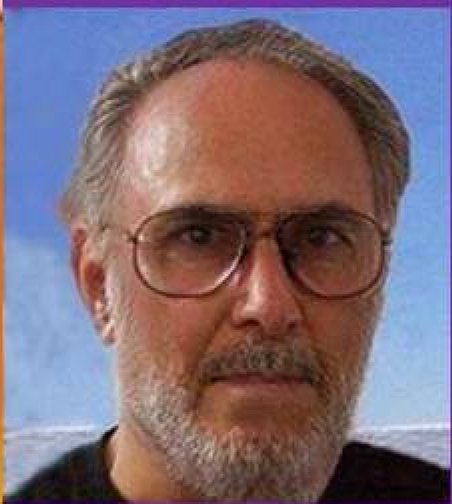
The experiments of M. Verdet (*) supply all that is wanted except the determination of *Z* in absolute measure; and this would also be known for all his experiments, if the value of the galvanometer deflection for a semi-rotation of the testing bobbin in a known magnetic field, such as that due to terrestrial magnetism at Paris, were once for all determined.

[*] *Annales de Chimie et de Physique*, série. 3, Vol. xli. p. 370.

CONTENIDOS

PART I.	**THE THEORY OF MOLECULAR VORTICES APPLIED TO MAGNETIC PHENOMENA**	355
PART II.	**THE THEORY OF MOLECULAR VORTICES APPLIED TO ELECTRIC CURRENTS**	371
NOTE		390
PART III.	**THE THEORY OF MOLECULAR VORTICES APPLIED TO STATICAL ELECTRICITY**	393
PART IV.	**THE THEORY OF MOLECULAR VORTICES APPLIED TO THE ACTION OF MAGNETISM**	407
	ON POLARIZED LIGHT	407

En esta obra el autor nos presenta el análisis que, en su libro de 1901, hizo Pierre Duhem sobre el electromagnetismo de James Clerk Maxwell, sobre la base de los conceptos vertidos por el científico escocés en sus trabajos: On Faraday's lines of Force, On Physical Lines of Force, A dynamical theory of the Electromagnetic Field, A Treatise on Electricity and Magnetism y An Elementary Treatise on Electricity. Para facilitar las consultas del lector se agrega una copia del primer trabajo y la traducción al castellano del segundo y el tercero.



Miguel Katz, además de ser Profesor en Química y Licenciado en Enseñanza de la Química, es Doctor en Epistemología e Historia de la Ciencia. En su extensa carrera docente ha sido Profesor Titular de Mecánica Cuántica, Termodinámica y otras disciplinas afines. Ha sido Consultor del Programa de las Naciones Unidas para el desarrollo y ha publicado una veintena de libros sobre distintos temas científicos.

ISBN 978-987-46579-7-8
9 789874 657978